

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI**

# **SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM**

## **PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN**

**Lĩnh vực/môn : Toán**

**Cấp học : Trung học cơ sở**

**Tên tác giả: Nguyễn Cao Cường**

**Đơn vị công tác: Trường THCS Thái Thịnh, quận Đống Đa**

**Chức vụ: Hiệu trưởng**

**NĂM HỌC 2019 - 2020**

## MỤC LỤC

	Trang
1. ĐẶT VẤN ĐỀ	
1.1. Lí do chọn đề tài	2
1.2. Nhiệm vụ và mục đích của đề tài	2
1.3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của đề tài	3
2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ	3
2.1. Bài toán rút gọn biểu thức chứa căn	3
2.2 Các câu hỏi phụ của bài toán rút gọn	7
2.2.1. Dạng 1: Tính giá trị của biểu thức biết giá trị của x:	7
2.2.2 Dạng 2: Tìm x biết giá trị của biểu thức	8
2.2.3. Dạng 3: Tìm x biết $P > a; P < a; P \geq a; P \leq a$	9
2.2.4. Dạng 4: So sánh giá trị biểu thức với một số a	10
2.2.5. Dạng 5: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên	11
2.2.6. Dạng 6: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức	12
2.2.7. Dạng 7: Tìm giá trị của tham số m để P thoả mãn một đẳng thức, một bất đẳng thức:	13
3. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ	17
TÀI LIỆU THAM KHẢO	
PHỤ LỤC	

## **1. ĐẶT VẤN ĐỀ**

### **1.1. Lý do chọn đề tài**

Từ năm học 2006 – 2007 đến năm học 2018-2019, Sở GD&ĐT Hà Nội thực hiện phương án thi vào lớp 10 theo hình thức kết hợp thi tuyển với xét tuyển. Từ năm học 2019 – 2020, phương án thi vào lớp 10 là thi tuyển bốn môn: Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh và môn thứ tư. Với cả hai phương án, kết quả bài thi môn Toán và Văn được nhân hệ số 2, đóng vai trò quan trọng trong việc quyết định tổng điểm của học sinh. Chính vì vậy, giáo viên luôn trăn trở việc làm thế nào để ôn luyện cho học sinh của mình ôn tập một cách có hệ thống, hoàn thiện kiến thức Trung học cơ sở môn Toán, ngày càng yêu thích môn học đồng thời đạt điểm cao trong bài thi vào lớp 10. Cấu trúc đề thi vào lớp 10 môn Toán của Hà Nội luôn ổn định với 5 dạng bài: Rút gọn biểu thức; Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình; Phương trình, hàm số, đồ thị; Hình học; Cực trị. Với những học sinh có lực học chưa tốt, bài toán rút gọn là một thử thách quan trọng. Hoàn thành được bài toán này học sinh có 2 điểm và tạo tâm lý tốt cho việc thực hiện các bài tập tiếp theo. Tuy vậy, các câu hỏi phụ của bài toán này ngày một đa dạng và khó. Chính vì vậy, tôi quyết định viết sáng kiến kinh nghiệm với đề tài: **“Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn”**

### **1.2. Nhiệm vụ và mục đích của đề tài**

Đề tài **“Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn”** với nhiệm vụ giúp học sinh ôn tập và củng cố kiến thức về bài toán rút gọn biểu thức chứa căn, hình thành phương pháp giải các câu hỏi phụ điển hình, từ đó giúp các em làm tốt bài thi vào lớp 10 môn Toán, đạt kết quả cao.

Đề tài **“Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn”** thực hiện việc thuật toán hóa các dạng toán thường gặp liên quan tới biểu thức chứa căn thức từ đó giúp học sinh có cái nhìn tổng quát, hình thành kỹ năng và phương pháp làm bài đúng, đủ yêu cầu.

## *Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

Số liệu khảo sát trước khi thực hiện đề tài (kiểm tra 01 đề rút gọn theo cấu trúc đề thi vào lớp 10) cho 50 học sinh lớp 9B, năm học 2017 – 2018 và 52 học sinh lớp 9G năm học 2018 – 2019:

Điểm	1-3	3-5	5-8	8-10
Tỉ lệ	30%	40%	30%	0%

Qua khảo sát, học sinh thường mắc nhiều lỗi ở các dạng từ đơn giản đến các dạng toán mở rộng, đặc biệt nhiều học sinh không biết phương pháp giải toán và mong muốn biết nguyên nhân giải sai và phương pháp giải các câu hỏi.

### **1.3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu của đề tài**

Đề tài được nghiên cứu và áp dụng với đối tượng là học sinh lớp 9.

Thời điểm áp dụng: Giai đoạn ôn tập hết chương I – Đại số 9 và giai đoạn ôn tập thi vào lớp 10.

## **2. GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ**

Để học sinh hiểu và giải quyết tốt các dạng toán từ đơn giản đến phức tạp, tôi thực hiện việc hệ thống hóa theo mức độ nhận thức từ nhận biết, thông hiểu, vận dụng và vận dụng cao.

### **2.1. Bài toán rút gọn biểu thức chứa căn**

Ở dạng toán này chúng ta nên thuật toán hóa các bước thực hiện cho học sinh.

#### **\*) Các bước thực hiện**

- Phân tích các mẫu thành nhân tử.
- Đổi dấu (nếu cần).
- Quy đồng mẫu thức các phân thức.
- Thực hiện phép tính trên tử và thu gọn tử.
- Phân tích tử thành nhân tử (và nhân nghịch đảo với phân thức chia nếu có)
- Rút gọn tiếp.
- Tìm điều kiện xác định (đkxđ)

#### **\*) Một số hằng đẳng thức hay dùng:**

Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn

$$x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1); \quad x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

$$x\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1); \quad x\sqrt{x}-1=(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$$

$$x-4\sqrt{x}+4=(\sqrt{x}-2)^2; \quad x+6\sqrt{x}+9=(\sqrt{x}+3)^2$$

**\*) Quy tắc đổi dấu:**  $\frac{A}{B} = -\frac{A}{-B}$  hoặc  $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

**\*) Một số bài giải mẫu:**

**Bài 1.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \right)$

**Bài giải.**

**Dkxđ:**  $x > 0; x \neq 4$

$$P = \left( \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$P = \left( \frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-4}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$$

**Bình luận:** Ta nhận thấy ở bài toán này việc phân tích mẫu thành nhân tử là đơn giản nhưng phải đổi dấu để được mẫu chung hợp lí. (dòng thứ 2: vừa kết hợp đổi dấu mẫu đồng thời đổi dấu phân thức và phân tích thành nhân tử, có lẽ nên tách làm 2 bước)

**Bài 2.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

**Bài giải.**

*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

$$P = \left( \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$P = \left( \frac{x+2-\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \right) : \left( \frac{4-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$P = \frac{x+2-x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{4-\sqrt{x}-\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$P = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{4-\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$P = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \frac{4-x}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$P = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$$

Đkxđ:  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

**Bình luận:** ở bài toán này việc phân tích mẫu dựa vào hằng đẳng thức  $x-1 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$  và việc đổi dấu ở mẫu của ngoặc thứ hai là tiên hành đổi dấu mẫu đồng thời đổi dấu tử.

**Bài 3.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{3x-5\sqrt{x}}{4-x} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-2}} - 1 \right)$

**Bài giải.**

$$P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{3x-5\sqrt{x}}{4-x} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-2}} - 1 \right)$$

$$P = \left( \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} - \frac{3x-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x}-1-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-2}} \right)$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x-2}) + \sqrt{x}(\sqrt{x+2}) - 3x + 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$P = \frac{3x-6\sqrt{x}+x+2\sqrt{x}-3x+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$P = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$$

Đkxđ:  $x \geq 0; x \neq 4$

**Bài 4.** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$

**Bài giải.**

$P = \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$ $P = \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})} \right) : \left( \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right)$ $P = \frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}) + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})} : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $P = \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})} : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $P = \frac{x-9-x+4+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})} : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $P = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})} \cdot (\sqrt{x+1})$ $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ <p>ĐKxđ: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	<p><b><u>Bình luận:</u></b> Bài toán này đã sử dụng 2 kỹ thuật trong việc tách mẫu thành nhân tử kèm theo đổi dấu mẫu, bên cạnh đó trong quá trình rút gọn tử cũng sử dụng những hằng đẳng thức quen thuộc.</p>
--	---

**Bài 5.** Rút gọn biểu thức

$P = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}+1}$ $P = \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}+1}$ $P = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}+1}$ $P = \frac{x+\sqrt{x}+1-(x+2)-(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{x+\sqrt{x}+1-x-2-(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{\sqrt{x}-1-x+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	<p><b><u>Bình luận:</u></b></p> <p>Ở bài toán này có thể nhận thấy những kỹ thuật:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Phân tích mẫu thành nhân tử rồi rút gọn phân thức (phân thức đầu tiên)</li> <li>- Sử dụng hằng đẳng thức</li> </ul> $x\sqrt{x}-1 = (\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$
--	--

Đkxđ: $x \geq 0; x \neq 1$	
----------------------------	--

## 2.2 Các câu hỏi phụ của bài toán rút gọn

### **2.2.1. Dạng 1: Tính giá trị của P biết giá trị của x:**

Ở dạng toán này, chúng ta nên hướng dẫn cho học sinh một số biến đổi của giá trị x ban đầu:

$$x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2; x = 6 + 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 1)^2; x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$$

$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2$$

Lưu ý: Câu hỏi này chỉ cho điểm tối đa khi kết quả của P đã được khử mẫu hoặc trục căn thức.

**Bài 1.** Tính giá trị của  $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$  với  $x \geq 0; x \neq 16$  biết  $x = 4 - 2\sqrt{3}$

**Bài giải.**

$$x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Thay vào P ta có:

$$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 1}}{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 4}} = \frac{\sqrt{3} - 1 + 1}{\sqrt{3} - 1 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 5} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 5)}{3 - 25}$$

$$P = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{-22} = \frac{-3 - 5\sqrt{3}}{22}$$

**Bài 2.** Tính giá trị của  $P = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$  biết  $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$

**Bài giải.**

$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2 \text{ (thỏa mãn đk) thay vào P ta có:}$$

$$P = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 - 1}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} = \frac{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)}$$

$$P = \frac{4\sqrt{3} + 8 - 6 - 4\sqrt{3}}{3 - 4} = \frac{2}{-1} = -2$$



**Bài 3.** Tính giá trị của  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$  biết  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**Bài giải**

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \text{ (tmdk) thay vào}$ <p>P ta có</p> $P = \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} + 1\right) : \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} - 2\right)$ $P = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1\right) : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 2\right) = \frac{\sqrt{5}-1+2}{2} : \frac{\sqrt{5}-1-4}{2}$ $P = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : \frac{\sqrt{5}-5}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}-5}$ $P = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-5} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+5)}{(\sqrt{5}-5)(\sqrt{5}+5)} = \frac{5+5\sqrt{5}+\sqrt{5}+5}{5-25}$ $P = \frac{10+6\sqrt{5}}{-20} = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10}$	<p><b><u>Bình luận:</u></b></p> <p>Đôi khi cách viết biểu thức cũng quan trọng không kém. ở bài này ta thấy x có dạng phân thức. Chính vì thế nên viết theo kiểu Tử : Mẫu để biểu thức không cồng kềnh.</p>
--	---

**2.2.2 Dạng 2: Tìm x biết P = a (a là một giá trị thực)**

Bản chất của câu hỏi này là giải phương trình (chứa căn). Vậy phải chú ý:

- Qui đồng và bỏ mẫu
- Đặt  $\sqrt{x} = t$  và đừng quên đặt điều kiện cho t.
- Tìm được t thoả mãn điều kiện đã đặt.
- Tìm x thông qua t.

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ . Tìm x biết  $P = -\sqrt{x}$

**Bài giải**

$$P = -\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = -\sqrt{x} \Leftrightarrow x+3\sqrt{x}-1=0$$

Đặt  $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0; t \neq 1; t \neq 2)$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\Delta=13>0, \text{ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } \begin{cases} t = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ t = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } \Leftrightarrow t = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{13}}{2} \text{ (tmdk)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11-3\sqrt{13}}{2}$$

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$  với  $x > 0; x \neq 4$ . Tìm x biết:  $P(\sqrt{x}-4) = 2x$

**Bài giải**

$$P(\sqrt{x}-4) = 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}(\sqrt{x}-4) = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 2x \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \quad (t > 0; t \neq 2) \text{ Pt } \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (tmdk)}$$

**2.2.3. Dạng 3: Tìm x biết**  $P > a; P < a; P \geq a; P \leq a$  **(a là một giá trị thực)**

Bản chất của câu hỏi này là giải bất phương trình (chứa căn). Vậy phải chú ý:

- Khi giải bất phương trình chỉ được phép bỏ mẫu khi xác định được dấu của mẫu và chiều của bất phương trình.
- Nghiệm tìm được phải được kết hợp với những điều kiện đã đặt.

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ . Tìm x biết  $P > 1$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} P > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}-2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4 \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện xác định ta có: } \begin{cases} 0 \leq x < 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$  với  $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$ . Tìm x biết  $|P| > P$

**Bài giải**

$$|P| > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} < 0$$

$$\text{Ta có } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$$

$$\text{Để } \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$$

$$\text{Kết hợp điều kiện xác định: } \begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

**2.2.4. Dạng 4: So sánh P với một số a**

Phương pháp: Xét hiệu P - a.

$$\text{- Nếu } P - a > 0 \Leftrightarrow P > a$$

$$\text{- Nếu } P - a < 0 \Leftrightarrow P < a$$

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ . So sánh P với 2

**Bài giải**

$$\text{Xét } P - 2 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - 2 \Leftrightarrow P - 2 = \frac{2\sqrt{x} - 2(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow P - 2 = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Ta có } x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow P - 2 = \frac{-2}{\sqrt{x+1}} < 0 \text{ với mọi } x \text{ thoả mãn đkxđ}$$

$$\Leftrightarrow P < 2 \text{ với mọi } x \text{ thoả mãn đkxđ}$$

Vậy  $P < 2$  với mọi  $x$  thoả mãn đkxđ.

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$ . So sánh P với 3

**Bài giải**

$$\text{Xét } P - 3 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x + \sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow P - 3 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Ta có } x > 0; x \neq 1 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 > 0; \sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow P - 3 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow P > 3 \quad \forall x \text{ thoả mãn điều kiện}$$

**Bài 3.** Cho  $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x+1}}$  với  $x > 0; x \neq 1$ . So sánh P với |P|

**Bài giải**

Ta có  $x - \sqrt{x} + 1 = x - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \text{ tm đk xd}$

Mà  $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 > 1 > 0$

$$\Rightarrow P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} > 0$$

$$\Rightarrow |P| = P$$

**2.2.5. Dạng 5: Tìm giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên:**

Ở dạng toán này chúng ta cần lưu ý học sinh đọc kỹ yêu cầu của đề bài: tìm giá trị nguyên của x hay tìm giá trị của x. Trong yêu cầu tìm giá trị nguyên của x thì phương pháp thực hiện là quy về ước, bội. Còn với yêu cầu tìm giá trị của x, hiểu là giá trị của x thuộc tập số thực thì phương pháp thực hiện lại là sử dụng bất đẳng thức để chặn giá trị của biểu thức.

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ . Tìm  $x \in Z$  để  $P \in Z$

**Bài giải**

Ta có  $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$ , để  $P \in Z$   $\sqrt{x} + 1 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$ . Ta có bảng sau:

$\sqrt{x} + 1$	-3	-1	1	3
$\sqrt{x}$	-4	-2	0	2
x	$\emptyset$	$\emptyset$	0	4

Vậy  $x \in \{0; 4\}$

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$  với  $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$ . Tìm  $x \in Z$  để  $P \in Z$

**Bài giải**

Ta có  $P = 3 + \frac{4}{\sqrt{x} - 2}$ , để  $P \in Z$   $\sqrt{x} - 2 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ . Ta có bảng sau:

$\sqrt{x} - 2$	-4	-2	-1	1	2	4
$\sqrt{x}$	-2	0	1	3	4	6
x	$\emptyset$	0	1	9	16	36
		(loại)		(loại)		

Vậy  $x \in \{1; 16; 36\}$

**Bài 3.** Cho  $P = \frac{7}{\sqrt{x} + 3}$  với  $x \geq 0$ . Tìm  $x$  để  $P$  có giá trị nguyên.

**Bài giải**

Ta có  $x \geq 0$  nên  $P > 0$

Mặt khác  $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{7}{3}$  nên  $0 < P \leq \frac{7}{3}$ . Để  $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}$

+)  $P = 1 \Leftrightarrow x = 16$  (thỏa mãn điều kiện)

+)  $P = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$  (thỏa mãn điều kiện)

Vậy  $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 16 \right\}$

**2.2.6. Dạng 6: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P**

Đối với dạng toán này ta chia làm loại bài tập thường gặp: Khi chia tử cho mẫu, thương là số thì thực hiện đánh giá từ điều kiện của  $x$ . Khi chia tử cho mẫu, thương là biến thì phương pháp thực hiện là sử dụng bất đẳng thức Cô – si (AM-GM).

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

**Bài giải**

Ta có

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow P_{\max} = \frac{3}{2}$  khi  $x = 0$ . Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  là  $\frac{3}{2}$  khi  $x = 0$ .

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{5\sqrt{x} + 13}{\sqrt{x} + 3}$  với  $x \geq 0; x \neq 9$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

**Bài giải**

Ta có  $P = 5 + \frac{-2}{\sqrt{x} + 3}$

$$\begin{aligned}x \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \\&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{1}{3} \\&\Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{-2}{3} \\&\Leftrightarrow 5 + \frac{-2}{\sqrt{x} + 2} \geq 5 + \frac{-2}{3} \\&\Leftrightarrow P \geq \frac{13}{3}\end{aligned}$$

$\Rightarrow P_{\min} = \frac{13}{3}$  khi  $x = 0$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  là  $\frac{13}{3}$  khi  $x = 0$ .

**Bài 3.** Cho  $P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$  với  $x > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

### Bài giải

Ta có  $P = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

Vì  $x > 0$  nên  $\sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ . áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số  $\sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ :

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow P \geq 1$$

$\Rightarrow P_{\min} = 1$  khi  $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$ . Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P = 1$  khi  $x = 1$ .

**Bài 4.** Cho  $P = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$  với  $x > 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

### Bài giải

Ta có  $P = 2\sqrt{x} + 4 + \frac{8}{\sqrt{x} - 2} = 2(\sqrt{x} - 2) + \frac{8}{\sqrt{x} - 2} + 8$

Vì  $x > 4$  nên  $2(\sqrt{x} - 2) > 0; \frac{8}{\sqrt{x} - 2} > 0$ . áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số

$$: 2(\sqrt{x} - 2) > 0; \frac{8}{\sqrt{x} - 2} > 0$$

$$2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x}-2} \geq 2 \sqrt{2(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{8}{(\sqrt{x}-2)}}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x}-2} \geq 8$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-2) + \frac{8}{\sqrt{x}-2} + 8 \geq 8 + 8$$

$$\Leftrightarrow P \geq 16$$

$$\Rightarrow P_{\min} = 16 \text{ khi}$$

$$2(\sqrt{x}-2) = \frac{8}{\sqrt{x}-2} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2=2 \\ \sqrt{x}-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ x=0(l) \end{cases} \Leftrightarrow x=16$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 16 khi x = 16.

### **2.2.7. Dạng 7: Tìm giá trị của tham số m để P thỏa mãn một đẳng thức, một bất đẳng thức:**

Những bài tập của dạng toán này thường được quy về phương trình, bất phương trình và thực hiện biện luận theo điều kiện ban đầu để kết luận về tham số. Chúng ta nên hướng dẫn với đối tượng học sinh giỏi một chút kiến thức về nghiệm và số nghiệm của phương trình, một số quy tắc giải bất phương trình.

**Bài 1.** Cho  $P = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$  với  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$ .

Tìm m để có 1 giá trị x thỏa mãn:  $P(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}(m-2x) - \sqrt{x} = m-1$

#### **Bài giải**

$$P(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}(m-2x) - \sqrt{x} = m-1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(-2x+m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(\text{tmdk}) \\ x = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Để có 1 giá trị x thì:  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{2} = 1 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \\ \frac{m-1}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \\ m = 9 \end{cases}$ . Vậy m < 1 hoặc m=3; hoặc m = 9

**Bài 2.** Cho  $P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$  với  $x > 0: x \neq 4; x \neq 9$

Tìm m để  $P = m + 3\sqrt{x} - 2$  có 2 nghiệm phân biệt.

**Bài giải**

$$P = m + 3\sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x - (m-11)\sqrt{x} + 3m - 6 = 0 \quad (1)$$

Đặt  $t = \sqrt{x}$   $t > 0; t \neq 2; t \neq 3$  pt trở thành :

$$Pt \Leftrightarrow t^2 - (m-11)t + 3m - 6 = 0 \quad (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác 2 và 3

$$\text{Điều này xảy ra khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ t \neq 2; t \neq 3 \end{cases}$$

Giải ra được  $m > 29$

**Bài 3.** Cho  $P = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ . Tìm m để với mọi  $x > 9$  ta có:

$$x \cdot [P \cdot (\sqrt{x} - 2) + 2m] < 1 + 4x$$

**Bài giải.** (Bản chất là tìm m để  $x > 9$  là tập con của tập nghiệm bất phương trình trên)

$$x \cdot [P \cdot (\sqrt{x} - 2) + 2m] < 1 + 4x \Leftrightarrow x(2m - 1) < 1$$

$$\text{Đề bpt đúng với mọi } x > 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ x > \frac{1}{2m-1} \\ \forall x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ \frac{1}{2m-1} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ \frac{1}{2m-1} - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ \frac{10-18m}{2m-1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ 10-18m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

**Bài 4.** Cho  $P = 1 - \sqrt{x}$  Đkxd:  $x > 0; x \neq 4$

Tìm m để có x thỏa mãn  $(\sqrt{x} + 1) \cdot P > \sqrt{x} + m$

**Bài giải**



$$(\sqrt{x}+1).P > \sqrt{x}+m \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+m-1 < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + m < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4} - m \quad (1)$$

Ta có

$$x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2): } \frac{5}{4} - m > \frac{1}{4} \Leftrightarrow m < 1$$

### **3 . KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ**

Đề tài “**Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn**” đã được sử dụng trong giảng dạy ôn thi vào lớp 10 cho học sinh lớp 9 trong các năm học 2016 – 2017; 2017-2018; 2018 – 2019. Học sinh rất hứng thú với các đề vì các yếu tố: Học sinh dễ dàng làm được các câu hỏi cơ bản, nắm được phương pháp giải các câu hỏi phụ, là những câu hỏi khó, mang tính quyết định đạt điểm tối đa bài toán rút gọn trong đề thi.

Số liệu thống kê điểm kiểm tra bài toán rút gọn theo cấu trúc đề thi vào lớp 10 Hà Nội năm học 2017 – 2018 của học sinh lớp 9B và năm học 2018 – 2019 của lớp 9G, sau khi áp dụng đề tài:

Điểm	1-3	3-5	5-8	8-10
Tỉ lệ	0%	5%	60%	35%

Sau khi thực hiện đề tài học sinh tự tin thực hiện các câu hỏi phụ của bài toán rút gọn, những học sinh giỏi đảm bảo thực hiện và đạt điểm tuyệt đối của bài toán này trong đề thi vào lớp 10.

Đề tài “**Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn**” có thể sử dụng theo nhiều mục đích khác nhau tùy đối tượng. Với học sinh học trực tiếp trên lớp hoặc học sinh tự ôn tập: đây là tài liệu mang tính định hướng, giúp học sinh củng cố kiến thức và ôn tập cho kỳ thi vào lớp 10 Thành phố Hà Nội. Sau mỗi bài học, giáo viên phát đáp án, biểu điểm cho các em, giúp các em tự đánh giá được khả năng của mình, sửa lỗi sai, củng cố kiến thức. Tác giả cũng hy vọng rằng, đối với các bạn đồng nghiệp, đề tài có thể là tài liệu tham khảo hữu ích, sử dụng hiệu quả trong quá trình giảng dạy.

Chắc chắn rằng đề tài “**Rút gọn biểu thức chứa căn và các câu hỏi liên quan**” không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong sự đóng góp của quý vị và các bạn.

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Sách giáo khoa Toán 9 tập 1, tập 2 – NXB GD VN
2. Hà Văn Chương - 838 bài toán bất đẳng thức – NXB ĐHQG TPHCM.
3. Nguyễn Đức Tấn – Chuyên đề bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số (THCS)  
– NXB Giáo dục
4. Trần Phương – Những sai lầm thường gặp khi giải toán.
5. Nguyễn Vũ Thanh – Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS : Đại Số -  
NXB Giáo dục.
6. Phạm Quốc Phong – Nâng cao đại số - NXB Giáo dục.
7. Nguyễn Văn Mậu -Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp không mẫu mực  
– NXB Giáo dục.

**PHIẾU ĐIỀU TRA THỰC TRẠNG TRƯỚC KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN**

Em hãy giải các bài toán sau. Các bài toán dưới đây không lấy điểm mà chỉ mang tính chất tìm hiểu về mức độ đáp ứng của em với một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn. Em có thể ghi tên hoặc không.

Họ và tên:..... Lớp:.....

**Bài 1.** Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$  với điều kiện

$x \geq 0; x \neq 4$

1. Tính giá trị của  $B$  khi  $x = \frac{1}{9}$ .
2. Rút gọn biểu thức  $P = A.B$ . Chứng minh  $P < 1$ .
3. Tìm các giá trị của  $x$  để  $\sqrt{2x-3} - A.(\sqrt{x}-2) = 2x-6$ .

**Bài 2.** Với số thực  $x > 0$  và  $x \neq 16$ , cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$  và  $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{x+12\sqrt{x}}{x-16}$

1. Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
2. Rút gọn biểu thức  $B$ .
3. Tìm  $x$  để  $\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$

**Cảm ơn em đã tham gia khảo sát!**

**PHIẾU ĐIỀU TRA THỰC TRẠNG SAU KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN**

Em hãy giải các bài toán sau. Các bài toán dưới đây không lấy điểm mà chỉ mang tính chất tìm hiểu về mức độ đáp ứng của em với một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn. Em có thể ghi tên hoặc không.

Họ và tên:..... Lớp:.....

**Bài 1.** Với số thực  $x > 0$  và  $x \neq 4; x \neq 9$

Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-3}{x+2\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{x+12}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{\sqrt{x}-2}$

1. Tính giá trị biểu thức A khi  $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$
2. Rút gọn biểu thức B.
3. Tìm x để  $\frac{B}{A} < 3$ .

**Bài 2.** Cho biểu thức  $A = \frac{3\sqrt{x}-5}{x+3}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{6}{1-x}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

1. Tính giá trị của A khi  $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$
2. Rút gọn B
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \sqrt{\frac{B}{A}}$

**Cảm ơn em đã tham gia khảo sát!**

**PHỤ LỤC THAM KHẢO**

**Một số bài tập tự luyện kèm đáp án và biểu điểm**

Theo đúng biểu điểm của đề thi vào lớp 10 Hà Nội, mỗi bài rút gọn có số điểm là 2 điểm. Mỗi bài ở phụ lục dưới đây đều được thiết kế về nội dung và biểu điểm theo cấu trúc đề thi môn Toán vào lớp 10 Hà Nội.

**Bài 1 (2,0 điểm)** Với  $x \geq 0; x \neq 9$ , cho  $A = \frac{-5}{\sqrt{x}-3}$  và  $B = \frac{2x-5\sqrt{x}+3}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 4 + 2\sqrt{3}$
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $(B-1).A$

**Đáp án và biểu điểm**

1	1) Ta có $x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ , thay vào A ta có:	0,25
	$A = \frac{-5}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-3} = \frac{-5}{\sqrt{3}-2} = \frac{-5(\sqrt{3}+2)}{3-4} = 5\sqrt{3}+10$	0,25
2	2) $B = \frac{2x-5\sqrt{x}+3}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	$B = \frac{2x-5\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	$B = \frac{2x-5\sqrt{x}+3-(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
	$B = \frac{2x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
	$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	
	$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	
3	$(B-1).A = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 1 \right) \cdot \frac{-5}{\sqrt{x}-3} = \frac{-5}{\sqrt{x}+3}$	0,25
	Ta có $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}+3} \geq \frac{-5}{3}$	0,25

*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

	Giá trị nhỏ nhất của $(B-1).A$ là $\frac{-5}{3}$ khi $x=0$	
--	--	--

**Bài 2** (2,0 điểm) Với  $x \geq 0; x \neq 4$ , cho  $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$  và  $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 4 + 2\sqrt{3}$
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $M = -4A.B$

**Đáp án và biểu điểm**

1	<p>1) Tính giá trị của biểu thức A khi <math>x = 4 + 2\sqrt{3}</math></p> <p>Ta có <math>x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2</math>, thay vào A ta có:</p> $A = \frac{3}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - 2} = \frac{3}{\sqrt{3}-1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}$	0,25  0,25
2	<p>2)</p> $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2 - (\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $B = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $B = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$	0,25  0,25  0,25  0,25
3	$M = -4AB = -4 \cdot \frac{3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{-12}{\sqrt{x}+2}$ <p>Ta có <math>x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-12}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{-12}{2}</math></p> <p>Giá trị nhỏ nhất của <math>M</math> là -6 khi <math>x=0</math></p>	0,25  0,25

**Bài 3 (2,0 điểm)** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

1) Rút gọn P (1,5đ)

2) Tìm x để P = -1 (0,5đ)

3) Tìm m để phương trình  $P = m + 3\sqrt{x} - 2$  có hai nghiệm phân biệt. (0,5đ)

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \frac{4\sqrt{x}(2-\sqrt{x})+8x}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ $P = \frac{8\sqrt{x}+4x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ $P = \frac{4x(\sqrt{x}-2)}{(2-\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$ $P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$ <p>Đkxđ: <math>x &gt; 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	0,5đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ  0,25đ
2	$P = -1 \Leftrightarrow 4x + \sqrt{x} - 3 = 0$ Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t > 0; t \neq 2; t \neq 3)$  $Pt \Leftrightarrow 4t^2 + t - 3 = 0$ , giải ra $t = -1$ (loại); $t = \frac{3}{4}$ (tmđk)  $\sqrt{x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{9}{16}$  Vậy $x = \frac{9}{16}$ ( Thỏa mãn điều kiện )	0,25đ    0,25đ
3	$P = m + 3\sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x - (m-11)\sqrt{x} + 3m - 6 = 0 \quad (1)$ Đặt $t = \sqrt{x} \quad t > 0; t \neq 2; t \neq 3$ pt trở thành : $Pt \Leftrightarrow t^2 - (m-11)t + 3m - 6 = 0 \quad (2)$ Để pt(1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt khác 2 và 3  Điều này xảy ra khi: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ t \neq 2; t \neq 3 \end{cases}$	0,25đ       0,25đ



**Bài 4** (2,0 điểm) Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3\sqrt{x}+1}{1-x}$

1) Rút gọn P (1,5đ)

2) Tính giá trị của P biết  $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$  (0,5đ)

3) Tìm x để  $P = -\sqrt{x}$  (0,5đ)

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3\sqrt{x}+1}{1-x}$ $P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}+1)^2 - 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ <p>Đkxđ: <math>x \geq 0; x \neq 1</math></p>	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
		0,25
		0,25
2	$x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = (\sqrt{3}-1)^2$ , thay vào P $P = \frac{2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}-1}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)-1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$	0,25
		0,25
3	$P = -\sqrt{x} \Leftrightarrow x+3\sqrt{x}-1=0$ Đặt $t = \sqrt{x}$ ( $t \geq 0; t \neq 1$ ) $Pt \Leftrightarrow t^2+3t-1=0$ $\Delta = 13 > 0$ $t_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ (l) $t_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ (tmdk)	0,25
		0,25

Với $t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \left( \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right)^2 = \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2}$
--

**Bài 5 (2,0 điểm)** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left( \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P biết  $x = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$

3) Tìm m để có 1 giá trị x thỏa mãn  $P(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}(2x - m) + \sqrt{x}(1 - 2\sqrt{x}) = 4 - m$

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left( \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$ $P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x} - x + 9}{x - 9} \right) : \left( \frac{9 - x}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$ $P = \frac{-3\sqrt{x} + 9}{x - 9} : \frac{9 - x + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} - 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}$ $P = \frac{-3(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{9 - x + x - 9 - (\sqrt{x} - 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}$ $P = \frac{-3}{(\sqrt{x} + 3)} : \frac{-(\sqrt{x} - 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{3}{(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 2)}$ $P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$ <p>Đkxd: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
2	$x = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2$ $P = 3 : \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - 2 \right) = 3 : \frac{\sqrt{5} - 5}{2} = \frac{6}{\sqrt{5} - 5} = -\frac{3\sqrt{5} + 15}{10}$	0,25 0,25
3	<p>Tìm m để có 1 giá trị x thỏa mãn</p> $P(\sqrt{x} - 2) + \sqrt{x}(2x - m) + \sqrt{x}(1 - 2\sqrt{x}) = 4 - m \quad (*)$ $\Leftrightarrow 3 + 2x\sqrt{x} - m\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2x - 4 + m = 0$ $\Leftrightarrow 2x(\sqrt{x} - 1) - m(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{x} - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(2x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(\text{tmdk}) \\ x = \frac{m - 1}{2} \end{cases}$	0,25

*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

<p>Để có 1 giá trị x thỏa mãn (*):</p> $\begin{cases} \frac{m-1}{2} = 1 \\ \frac{m-1}{2} < 0 \\ \frac{m-1}{2} = 4 \\ \frac{m-1}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < 1 \\ m = 9 \\ m = 19 \end{cases} \text{ Vậy } m < 1 \text{ hoặc } m \in \{3; 9; 19\}$	0,25
---	------

**Bài 5 (2,0 điểm)** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt{x+2}}{x-1}$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tính giá trị của P biết  $x = 4 + 2\sqrt{3}$
- 3) So sánh P với 2

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ <p>Đkxd: <math>x \geq 0; x \neq 1</math></p>	1
2	$x = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ $P = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(2\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)}{3 - 4}$ $P = \frac{6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{-1} = 2\sqrt{3} - 2$	0,25 0,25
3	<p>Xét</p> $P - 2 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - 2$ $P - 2 = \frac{-2}{\sqrt{x+1}}$ <p>Ta có <math>x \geq 0</math> nên <math>\sqrt{x+1} &gt; 0 \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{x+1}} &lt; 0 \Leftrightarrow P - 2 &lt; 0 \Leftrightarrow P &lt; 2</math></p> <p>Vậy <math>P &lt; 2</math> với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định</p>	0,25 0,25

**Bài 6 (2 điểm)** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x+9}}{x-3\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3}$  với

$x > 0; x \neq 9; x \neq 16$

- 1) Tính giá trị của B biết  $x = 4 - 2\sqrt{3}$
- 2) Rút gọn A

3) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $P \in \mathbb{Z}$  biết  $P = A : B$

**Đáp án và biểu điểm**

1	$A = \frac{x+2}{x-3}; B = \frac{x-4}{x-3}$ $A = \frac{x+2}{x-3}; B = \frac{x-4}{x-3}$ <p>Đkxd: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	0,25 0,25 0,25 0,25
2	<p>Đkxd: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p> <p><math>x = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2</math>, thay vào P ta có:</p> $P = \frac{\sqrt{3}-1+3}{\sqrt{3}-1-2} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)}{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+3)} = \frac{-9-5\sqrt{3}}{6}$	0,25  0,25
3	<p>Đkxd: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p> $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+8}{2(\sqrt{x}-2)} < 0$ <p>Ta có <math>x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 8 &gt; 0</math>. Để <math>\frac{\sqrt{x}+8}{2(\sqrt{x}-2)} &lt; 0</math> thì</p> <p><math>\sqrt{x}-2 &lt; 0 \Leftrightarrow x &lt; 4</math>. Kết hợp đkxd: <math>0 \leq x &lt; 4</math></p>	0,25  0,25

**Bài 7 (2 điểm)** Cho biểu thức  $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tính giá trị của x biết P = 5
- 3) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị là một số tự nhiên.

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ $P = \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $P = \frac{2\sqrt{x}-9 - (x-9) + (2x-3\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $P = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $P = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ <p>Dkxd: <math>x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>																												
2	<p>Tính giá trị của x biết P = 5</p> $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 5\sqrt{x}-15$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$	<p>0,25</p> <p>0,25</p>																												
3	<p>Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị là một số tự nhiên</p> <p>Ta có <math>P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}</math>, <math>P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3) \in U(4) = \{\pm 4; \pm 2; \pm 1\}</math></p> <p>Ta có bảng:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td><math>\sqrt{x}-3</math></td> <td>-4</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td><math>\sqrt{x}</math></td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>∅</td> <td>1</td> <td>4 (loại)</td> <td>16</td> <td>25</td> <td>49</td> </tr> <tr> <td>P</td> <td></td> <td>-1(loại)</td> <td></td> <td>5</td> <td>3</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p>Để P có giá trị là một số tự nhiên thì <math>x \in \{16; 25; 49\}</math></p>	$\sqrt{x}-3$	-4	-2	-1	1	2	4	$\sqrt{x}$	-1	1	2	4	5	7	x	∅	1	4 (loại)	16	25	49	P		-1(loại)		5	3	2	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
$\sqrt{x}-3$	-4	-2	-1	1	2	4																								
$\sqrt{x}$	-1	1	2	4	5	7																								
x	∅	1	4 (loại)	16	25	49																								
P		-1(loại)		5	3	2																								



**Bài 8 (2,0 điểm)** Cho biểu thức  $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x-x}}{1-x}\right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1+x}{1-x}\right)$

1) Rút gọn P

2) Tính P biết  $x^2 = \frac{4}{7+4\sqrt{3}}$

3) Tìm m lớn nhất để có x thoả mãn :  $2P.x = m - 2\sqrt{x}$

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \left(1 - \frac{\sqrt{x-x}}{1-x}\right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1+x}{1-x}\right)$ $= \left(1 - \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1+x}{x-1}\right)$ $= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})}\right) : \left(\frac{x-1-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+1+x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$ $= \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})}\right) : \left(\frac{-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$ $= \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{-2\sqrt{x}}$ $= \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ <p>Đkxđ: <math>x &gt; 0, x \neq 1</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
2	<p>+) <math>x^2 = \frac{4}{(2+\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} (tm) \\ x = -\frac{2}{2+\sqrt{3}} (k tm) \end{cases}</math></p> <p>+) <math>x = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4-2\sqrt{3}}{1} = (\sqrt{3}-1)^2</math></p> <p><math>\Rightarrow \sqrt{x} =  \sqrt{3}-1  = \sqrt{3}-1 \quad (\sqrt{3} &gt; 1)</math></p> <p>+) <math>P = \frac{1-(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>



Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn

3	$2P.x = m - 2\sqrt{x}$ $\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cdot x = m - 2\sqrt{x}$ $\Leftrightarrow m = 2\sqrt{x} + \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ $\Leftrightarrow m = 3\sqrt{x} - x$ $\Leftrightarrow m = \frac{9}{4} - \left(x - 2\sqrt{x} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right)$ $\Leftrightarrow m = \frac{9}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}, \forall x \in TXD$	<p>0,25</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi <math>x=9/4</math></p> <p>0,25</p>
<p>Vậy <math>m</math> lớn nhất cần tìm là <math>9/4</math></p>		

**Bài 9 (2 điểm)** Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{6-4\sqrt{x}}{9-x} \right) : \left( \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{x-4\sqrt{x}+7}{x+2\sqrt{x}-3} \right)$$

1) Rút gọn P

2) Tìm x biết  $|P| > P$

3) Tìm m để với mọi giá trị  $x > 9$  ta có:  $x \cdot [P \cdot (\sqrt{x}-2) + 2m] < 1 + 4x$

**Đáp án và biểu điểm**

1	$P = \frac{\sqrt{x}+3+6-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$ $P = \frac{-3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{-x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$ $P = \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)} : \frac{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$ $P = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ <p>Đkxđ: <math>x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4; x \neq 9</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
2	<p>Tìm x biết <math> P  &gt; P</math></p> $ P  > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$ <p>Kết hợp điều kiện xác định: <math>\begin{cases} 0 \leq x &lt; 4 \\ x \neq 1 \end{cases}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
3	<p>Tìm m để với mọi giá trị <math>x &gt; 9</math> ta có: <math>x \cdot [P \cdot (\sqrt{x}-2) + 2m] &lt; 1 + 4x</math></p>	<p>0,25</p>

	$x \cdot [P(\sqrt{x} - 2) + 2m] < 1 + 4x \Leftrightarrow x \cdot (3 + 2m) < 1 + 4x$ $\Leftrightarrow (2m - 1)x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2m - 1} \\ 2m - 1 < 0 \end{cases}$ <p>Đề <math>\forall x &gt; 9</math></p> $\begin{cases} \frac{1}{2m - 1} \leq 9 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5 - 9m}{2m - 1} \leq 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 9m \geq 0 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{5}{9} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$	0,25
--	---	------

**Bài 10 (2 điểm)** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$

- 1) Rút gọn P
- 2) Tính P biết  $x(4x+3)=1$
- 3) Tìm x để  $|P| > P$

**Đáp án và biểu điểm**

1	<p><i>đkxđ</i> : <math>x \geq 0; x \neq 9</math></p> $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) - 2x + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$	0,5  0,5
2	<p>+) <math>x(4x+3)=1 \Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1(l) \\ x=\frac{1}{4}(tm) \end{cases}</math></p> <p>+) Với <math>x=\frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-3} = -\frac{1}{5}</math></p>	0,25 0,25
3	$ P  > P \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 9$	0,5

**Bài 11 (2 điểm):** Với  $x \geq 0, x \neq 1; 4$ , cho hai biểu thức sau:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6} \quad \text{và} \quad B = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1}$$

- 1) Rút gọn các biểu thức A và B.
- 2) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn:  $x^2 - 20x + 64 = 0$ .
- 3) Chứng minh rằng khi  $A > 0$  thì  $B \geq 3$ .

**Đáp án và biểu điểm**

1	$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3) + 2(\sqrt{x}-2) - (9\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{x+4\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-4-9\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ $B = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,5  0,25  0,25
---	---	-----------------------------

*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

2	+) $x^2 - 20x + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (l)} \\ x = 16 \text{ (tm)} \end{cases}$ +) Với $x = 16 \Rightarrow A = \frac{4-1}{4+3} = \frac{3}{7}$	0,25 0,25
3	+) Vì $A > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$ (Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ ) $\Rightarrow x > 1$ +) Với $x > 1$ : $B = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = (\sqrt{x}-1) + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 \geq 3$ (Theo BĐT Côsi) (đpcm)	0,25 0,25

**Bài 12.** (2,0 điểm) Với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ ;  $x \neq 4$

Cho các biểu thức  $A = \frac{3x+1}{\sqrt{x}-1}$  và  $B = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right)$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi  $x = 16$ .
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Với A, B là các biểu thức nói trên, tìm x để  $A.B = 4.(\sqrt{x+4}+1)$ .

**Đáp án và biểu điểm**

1	với $x > 0$ ; $x \neq 1$ ; $x \neq 4$ Thay $x = 16$ ( tmđk) vào biểu thức A Tính được $A = \frac{49}{3}$	0,25 0,25
2	$B = \left[ \frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{5\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \right] : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{\sqrt{x}-5\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4-x}$ $= \frac{-4\sqrt{x}+4}{-4} = \sqrt{x}-1$	0,25 0,25 0,25
3	$A.B = 4.(\sqrt{x+4}+1)$ $\Leftrightarrow \frac{3x+1}{\sqrt{x}-1}(\sqrt{x}-1) - 4\sqrt{x+4} - 4 = 0$ $\Leftrightarrow 3x+1 - 4\sqrt{x+4} - 4 = 0$ $\Leftrightarrow 3(x+4) - 4\sqrt{x+4} - 15 = 0$	0,25
	Đặt $\sqrt{x+4} = t$ ( $t \geq 0$ ) (đk $t \neq 1$ ; $t \neq 2$ ) Phương trình trở thành: $3t^2 - 4t - 15 = 0$ Giải phương trình được: $t_1 = 3$ (thỏa mãn); $t_2 = -\frac{5}{3}$ (loại)	0,25
	Khi đó: $\sqrt{x+4} = 3$ $\Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25

*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

Vậy với $x = 5$ thì $A.B = 4.(\sqrt{x+4}+1)$
--

**Bài 13.** (2 điểm) Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

1) Rút gọn P

2) Tìm P biết  $x = \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{3}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $\sqrt{P}$ .

**Đáp án và biểu điểm**

<b>1</b>	<p>Rút gọn P. ĐK: <math>x &gt; 0</math>; <math>x \neq 4</math>; <math>x \neq 9</math></p> $P = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{4x - 8\sqrt{x} - 8x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}$ $= \frac{-4x - 8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ $= \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<b>2</b>	<p><math>x = \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{3}</math></p> <p>Biến đổi <math>x = 4 \rightarrow \sqrt{x} = 2</math></p> <p>Tính được <math>P = -16</math></p> <p>Vậy khi <math>x = \sqrt{19-8\sqrt{3}} + \sqrt{3}</math> thì <math>P = -16</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
<b>3</b>	<p>Tìm min <math>\sqrt{P}</math>:</p> $* P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3} = 4\sqrt{x} + 12 + \frac{36}{\sqrt{x}-3}$ <p>Tính được: <math>P = 4 \left( \sqrt{x} - 3 + \frac{9}{\sqrt{x}-3} + 6 \right)</math></p> <p>Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với <math>x &gt; 0</math></p> <p>Tìm được min <math>\sqrt{P} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 36</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>

**Bài 14** (2 điểm) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$  với  $x \geq 0$  và

- $x \neq 1$ . 1) Rút gọn biểu thức P.  
 2) Tính giá trị của P khi  $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ .  
 3) Tìm các giá trị của x để  $P \geq \frac{1}{4}$ .

**Đáp án và biểu điểm**

1	<p>Với <math>x \geq 0, x \neq 1</math></p> <p>Xét <math display="block">\frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}</math></p> $= \frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} - \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1}$ <p>Vậy <math>P = \left( \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} \left( \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \right)</math></p> $= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$	0,25  0,25  0,25  0,25
2	<p>Tính giá trị của P khi <math>x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}</math>.</p> $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$ $= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ $= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 0, x \neq 1)$ <p>Khi <math>x = 4</math> thì <math>P = \frac{1}{4}</math></p> <p><b>(chú ý:</b> học sinh có thể tính <math>x^2 = 16 \Rightarrow x = 4</math> )</p>	0,25 0,25 0,25  0,25
3	<p>Tìm các giá trị của x để <math>P \geq \frac{1}{4}</math>.</p> <p>Với <math>x \geq 0, x \neq 1</math>, khi đó <math>P \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \leq 4</math></p> <p>Kết hợp điều kiện ta có <math>\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}</math></p>	0,25  0,25

**Bài 15 (2 điểm)** Cho biểu thức  $A = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{x}{4-x}$  và  $B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$  với điều kiện  $x \geq 0; x \neq 4$

- a) Tính giá trị của  $B$  khi  $x = \frac{1}{9}$ .
- b) Rút gọn biểu thức  $P = A.B$ . Chứng minh  $P < 1$ .
- c) Tìm các giá trị của  $x$  để  $\sqrt{2x-3} - A(\sqrt{x-2}) = 2x-6$ .

**Đáp án và biểu điểm**

1	Tính giá trị của $B$ khi $x = \frac{1}{9}$ .	
	Với $x = \frac{1}{9}$ (TMĐK) thay vào biểu thức $B = \frac{\sqrt{\frac{1}{9}-2}}{\sqrt{\frac{1}{9}+3}}$	0,25
	Tính được $B = -\frac{1}{2}$	0,25
2	Rút gọn biểu thức $P = A.B$ . Chứng minh $P < 1$ . Ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{x}{x-4}$ $= \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{x}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})}$ $= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})}$ $= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$	0,5
	$P = A.B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$	0,25
	Ta có $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x+3}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+3}} < 1$	0,25
2	Tìm các giá trị của $x$ để $\sqrt{2x-3} - A(\sqrt{x-2}) = 2x-6$ .	



*Phương pháp giải một số dạng toán rút gọn biểu thức chứa căn*

<p>Điều kiện <math>x \geq \frac{3}{2}; x \neq 4</math></p> <p>Ta có: <math>\sqrt{2x-3} - A(\sqrt{x}-2) = 2x-6</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x-6</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} = 2(x-3)</math></p> <p><math>(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2\right) = 0</math></p>	0,25
<p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3(TM) \\ \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} = \frac{1}{2} (*) \end{cases}</math></p> <p>Vì <math>x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq 0 + \sqrt{\frac{3}{2}} &gt; \frac{1}{2}</math> nên PT (*) vô nghiệm.</p> <p>Vậy <math>x=3</math>.</p>	0,25