UBND QUẬN ĐỐNG ĐA

TR- ỜNG THCS THÁI THỊNH

-------*********-------

# SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

## MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
## GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Môn Toán

Tác giả: Nguyễn Đức Minh

Giáo viên môn Toán

Hà Nội, 2012

# A - PHẦN MỞ ĐẦU

## I- ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong quá trình học toán ở tr- ờng THCS học sinh cần biết cách tổ chức công việc của mình một cách sáng tạo. Ng- ời thầy cần rèn luyện cho học sinh kỹ năng, độc lập suy nghĩ một cách sâu sắc, sáng tạo. Vì vậy đòi hỏi ng- ời thầy một sự lao động sáng tạo biết tìm tòi ra những ph- ơng pháp để dạy cho học sinh trau dồi t- duy logic giải các bài toán.

Là một giáo viên dạy toán ở tr- ờng THCS trực tiếp bồi d- ỡng đội tuyển học sinh giỏi nhiều năm tôi nhận thấy việc giải các bài toán ở ch- ơng trình THCS không chỉ đơn giản là đảm bảo kiến thức trong SGK, đó mới chỉ là những điều kiện cần nh- ng ch- a đủ. Muốn giỏi toán cần phải luyện tập nhiều thông qua việc giải các bài toán đa dạng, giải các bài toán một cách khoa học, kiên nhẫn, tỉ mỉ, để tự tìm ra đáp số của chúng.

Muốn vậy ng- ời thầy phải biết vận dụng linh hoạt kiến thức trong nhiều tình huống khác nhauđể tạo hứng thú cho học sinh. Một bài toán có thể có nhiều cách giải, mỗi bài toán th- ờng nằm trong mỗi dạng toán khác nhau nó đòi hỏi phải biết vận dụng kiến thức trong nhiều lĩnh vực nhiều mặt một cách sáng tạo vì vậy học sinh phải biết sử dụng ph- ơng pháp nào cho phù hợp.

Các dạng toán về số học ở ch- ơng trình THCS thật đa dạng phong phú nh- : Toán về chia hết, phép chia có d- , số nguyên tố, số chính ph- ơng, **ph- ơng trình nghiệm nguyên**.

Đây là một dạng toán có trong SGK lớp 9 nh- ng ch- a đ- a ra ph- ơng pháp giải chung. Hơn nữa ph- ơng trình nghiệm nguyên có rất nhiều trong các đề thi:Tốt nghiệp THCS ;Trong các đề thi học sinh giỏi huyên, học sinh giỏi tỉnh ….

Song khi giải các bài toán này không ít khó khăn phức tạp. Từ thực tiễn giảng dạy tôi thấy học sinh hay bế tắc, lúng túng về cách xác định dạng toán và ch- a có nhiều ph- ơng pháp giải hay.

Từ những thuận lợi, khó khăn và yêu cầu thực tiễn giảng dạy.Tôi chọn đề tài: "**Rèn luyện t- duy sáng tạo qua một số dạng toán ph- ơng trình nghiệm nguyên**"

Trong quá trình viết đề tài do điều kiện và kinh nghiệm không tránh khỏi khiếm khuyết. Rất mong đ- ợc sự đóng góp, chỉ đạo của thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp.

## II. ĐIỀU TRA THỰC TRANG TR- ỚC KHI NGHIÊN CỨU.

Để đánh giá đ- ợc khả năng của các em đối với dạng toán trên và có ph- ơng án tối - u truyền đạt tới học sinh, tôi đã ra một đề toán cho 10 em học sinh trong đội tuyển của tr- ờng nh- sau:

**Bài 1: ( 6 đ )**

a)**Tìm x, y ∈ Z biết** $x - y + 2xy = 6$

**b) Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên:** $5x - 7y = 3$

**Bài 2: (4 đ)**

**Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình :**

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$$

**Kết quả thu đ- ợc nh- sau:**

| **D- ới điểm 5** | | **Điểm 5 - 7** | | **Điểm 8 - 10** | | **Điểm 5 - 10** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SL | % | SL | % | SL | % | SL | % |
| 6 | 60 | 4 | 40 | 0 | 0 | 4 | 40 |

Qua việc kiểm tra đánh giá tôi thấy học sinh không có biện pháp giải ph- ơng trình nghiệm nguyên đạt hiệu quả. Lời giải th- ờng dài dòng, không chính xác, đôi khi còn ngộ nhận . Cũng với bài toán trên nếu học sinh đ- ợc trang bị các phương pháp" **Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên** "thì chắc chắn sẽ có hiệu quả cao hơn.

## III-MUC ĐÍCH

- Đề tài nhằm rèn luyện cho học sinh t- duy sáng tạo khi học và giải toán.

- Biết cách định h- ớng và giải bài tập ngắn gọn.

- Phát huy trí lực của học sinh tìm nhiều cách giải hay phát triển bài toán mới.

- Giúp học sinh tự tin khi giải toán hoặc trong thi cử.

## IV-PHAM VI ÁP DUNG:

- □p dụng vào việc giảng dạy các chuyên đề trong tr- ờng học hoặc bồi d- ỡng đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 9, ôn tập cho học sinh chuẩn bị thi vào các lớp chọn, lớp chuyên PTTH.

- Thời gian nghiên cứu có hạn mặc dù đ- ợc sự góp ý chân thành của nhiều giáo viên có chuyên môn cao, song vẫn còn nhiều điều bỏ ngỏ để tiếp tục khai thác và đi sâu hết dạng toán này.

## B- NỘI DUNG

Ph- ơng trình nghiệm nguyên rất đa dạng và phong phú nó có thể là ph- ơng trình một ẩn, nhiều ẩn. Nó có thể là ph- ơng trình bậc nhất hoặc bậc cao. Không có cách giải chung cho mọi ph- ơng trình, để giải các ph- ơng trình đó th- ờng dựa vào cách giải một số ph- ơng trình cơ bản và một số ph- ơng pháp giải nh- sau:

## CH- ƠNG I - *Các dạng ph□ơng trình cơ bản*

**I-Ph- ơng trình nghiêm nguyên dang:**

**ax + by = c (1) với a, b, c ∈ Z**

***1.Các định lí:***

a. Định lí 1: Điều kiện cần và đủ để ph- ơng trình ax + by = c (trong đó a,b,c là các số nguyên khác 0 ) có nghiệm nguyên (a,b) là - ớc của c.

b.Định lí 2: Nếu ($x_0$, $y_0$) là một nghiệm nguyên của ph- ơng trình ax + by = c thì nó có vô số nghiệm nguyên và nghiệm nguyên (x,y) đ- ợc cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases}$$ Với t ∈ Z, d = (a,b)

***2.Cách giải:***

a.Tiến hành qua 5 b- ớc sau: (cách giải chung)

**B- ớc 1:** Tìm d = (a,b)

Khi đó ax + by = c ⇔ $a_1x + b_1y = c_1$

Với $a = da_1$; $b = db_1$; $c = dc_1$; $(a_1; b_1) = 1$

**B- ớc 2:** Viết thuật toán Ơclit cho 2 số $|a_1|$ và $|b_1|$

Giả sử : $|a_1| > |b_1|$ Ta có

$a_1 = |b_1| q_0 + r_1$

$b_1 = r_1q_1 + r_2$

$r_1 = r_2q_2 + r_3$

………………

$r_{n-2} = r_{n-1} + r_n$ Với $r_n = 1$

**B- ớc 3:** Tính $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a^k}}}} = \dfrac{m}{n}$

**B- ớc 4:** Lấy nghiệm riêng $(x_0'; y_0')$ của phương trình $a_1x + b_1y = 1$ sao cho :

$$\begin{cases} |x_0'| = m \\ |y_0'| = n \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} |x_0'| = n \\ |y_0'| = m \end{cases}$$

Xác định dấu bằng cách thử trực tiếp đ- ợc $(x_0', y_0')$

**B- ớc 5:** $x_0 = c_1 x_0'$; $y_0 = c_1y_0'$ là nghiệm riêng của phương trình

$a_1x + b_1y = c_1$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của ph- ơng trình là: $\begin{cases} x = x_0 + b_1 t \\ y = y_0 - a_1t \ (\text{với } t \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

**<u>Ví du 1</u>: Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên**

$$5x - 7y = 3$$

**H- ớng dẫn:**

Ta nhận thấy (5, 7) = (7, 3) = 1 . Vậy ph- ơng trình có nghiệm nguyên

Để giải ta tiến hành các b- ớc:

- Viết thuật toán Ơclit cho 2 số 5 và 7

$$\left.\begin{array}{l} 7 = 5.1 + 2 \\ 5 = 2.2 + 1 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

- Tìm nghiệm riêng của ph- ơng trình $5x - 7y = 1$

$(x_0', y_0') = (3, 2)$

- Tìm nghiệm riêng của ph- ơng trình $5x - 7y = 3$

là $(x_0, y_0) = (9, 6)$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của ph- ơng trình là:

$\begin{cases} x = 9 - 7t \\ \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 7t + 2 \\ \end{cases}$

$y = 6 - 5t$ $\qquad$ $y = 5t + 1$ $\qquad (t \in Z)$

**<u>Ví du 2</u>: Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên**

$6x - 14y = 12$

**H- ớng dẫn:**

Ta nhận thấy (6 ,14) = (6 ,12) = 2 $\Rightarrow$ pt có nghiệm ta tiến hành giải nh- sau:

**B- ớc 1:** $6x - 14y = 12 \Leftrightarrow 3x - 7y = 6$

**B- ớc 2:** Viết thuật toán Ơclit cho 3 và 7

$7 = 3.2 + 1$

**B- ớc 3:** Tính $\frac{m}{n} = q_0 = 2 = \frac{2}{1}$

**B- ớc 4:** Tìm nghiệm riêng của ph- ơng trình

$3x - 7y = 1$ là $(x_0', y_0') = (-2; -1)$

**B- ớc 5:** Xác định nghiệm riêng của pt $3x - 7y = 6$ là $(x_0; y_0) = (-12; -6)$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của ph- ơng trình $6x - 14y = 12$ là

$$\begin{cases} x = -12 - 7t \\ y = -6 - 3t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = 7t + 2 \\ y = 3t \end{cases} \quad (t \in Z)$$

*** Nhận xét:** Trên đây là ph- ơng pháp chung để giải ph- ơng trình nghiệm nguyên dạng $ax + by = c$

Tuy nhiên khi đi vào bài toán cụ thể bằng các kiến thức về chia hết biết khéo léo sử dụng sẽ cho lời giải ngắn gọn.

b.C□ch gi□i thẩng th- □ng kh□c (3 b- □c)

**B- ớc 1:** Rút ẩn này theo ẩn kia (giả sử rút x theo y)

**B- ớc 2:** Dựa vào điều kiện nguyên của x, tính chất chia hết suy luận để tìm y

**B- ớc 3:** Thay y vào x sẽ tìm đ- ợc nghiệm nguyên

**<u>Ví du 1</u>: Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên:**

$$\mathbf{2x + 5y = 7}$$

**H- ớng dẫn:** Ta có $2x + 5y = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7-5y}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 - 2y + \frac{1-y}{2}$

Do x, y nguyên $\Rightarrow \frac{1-y}{2}$ nguyên. Đặt $\frac{1-y}{2}$ = t với (t ∈ Z )

$\Rightarrow$ y = 1 — 2t $\Rightarrow$ x = 3 — 2(1- 2t) + t = 5t + 1

Vậy nghiệm tổng quát của ph- ơng trình là:

$$\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -2t + 1 \end{cases} \quad (t \in Z)$$

**<u>Ví du 2:</u> Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên**

6x — 15 y = 25

**H- ớng dẫn:**

Ta thấy( 6,15 ) = 3 mà 3/25

Vậy không tồn tại x,y nguyên sao cho 6x- 15y = 25

**<u>Ví du 3</u>: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình.**

**5x + 7y = 112**

**H- ớng dẫn:**

Ta có 5x + 7y = 112

$\Rightarrow$ x = $\frac{112-7y}{5}$ = 22 - y + $\frac{2-2y}{5}$

Do x, y nguyên $\Rightarrow \frac{2-2y}{5}$ nguyên hay (2 — 2y) ⋮ 5 $\Leftrightarrow$ 2(1-y) ⋮ 5; (2 , 5) = 1

$\Rightarrow$ (1-y) ⋮ 5 hay (y-1) ⋮ 5 . Đặt y-1 = 5t (t ∈ Z )

$\Rightarrow$ y = 5t +1

thay y vào x ta có x = 21 — 7t

lại có x > 0; y > 0 $\Rightarrow \begin{cases} 5t + 1 > 0 \\ 21 - 7t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -\frac{1}{5} \\ t < 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ t = $\{0;1;2\}$

Nếu t = 0 $\Rightarrow$ x = 21; y = 1

Nếu t = 1 $\Rightarrow$ x = 14; y = 6

Nếu t = 2 $\Rightarrow$ x = 7; y = 11

## II. Ph- ơng trình nghiêm nguyên dang

$$a_1x_1 + a_2x_2 + .... + a_nx_n = c \ (2)$$

Với a, c ∈ Z (i = 1,2…n); n ≥ 2

**1.Định lý: Điều kiện cần và đủ để ph- ơng trình (2) có nghiệm là $(a_1, a_2, \ldots a_n) \backslash c$**

**2.Cách giải: Đ- a ph- ơng trình về 1 trong 2 dạng sau:**

**a. Có một hệ số của một ẩn bằng 1**

Giả sử $a_1 = 1$. Khi đó $x_1 = c - a_2x_2 - a_3x_3 - \ldots - a_nx_n$

với $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Z$

Nghiệm của ph- ơng trình là:

$(c - a_2x_2 - a_3x_3 - \ldots - a_nx_n , x_2, \ldots, x_n)$ với $x_2, \ldots, x_n$ nguyên bất kỳ

**b. Có hai hệ số là hai số nguyên tố cùng nhau**

Giả sử $(a_1, a_2) = 1$. Khi đó pt (2) $\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 = c - a_3x_3 - \ldots - a_nx_n$

Giải ph- ơng trình theo 2 ẩn $x_1, x_2$

**<u>Ví du 4</u>: Giải ph- ơng trình trên tập số nguyên**

$$\mathbf{6x + 15y + 10z = 3}$$

**H- ớng dẫn:**

**P**h- ơng trình $6x + 15y + 10z = 3$ có nghiệm nguyên vì $(6, 15, 10) = 1$ và 1/3

**<u>Cách 1</u>**: Ta biến đổi $6x + 15y + 10z = 3$

$\Leftrightarrow x + 10(y + z) + 5(x + y) = 3$

Đặt $t = y + z$, $k = x + y$ với$(t, k \in Z)$. Ta có: $x + 10t + 5k = 3$

Vậy nghiệm tổng quát của ph- ơng trình

$$\begin{cases} x = 3 - 10t - 5k \\ y = -3 + 10t + 6k \\ z = 3 - 9t - 6k \end{cases} \quad (t, k \in Z)$$

**<u>Cách 2</u>**: $6x + 15y + 10z = 3$

$\Leftrightarrow 6(x + z) + 15y + 4z = 3$

Đặt $x + z = t$ ta có $6t + 15y + 4z = 3$

$\Leftrightarrow 15y + 4z = 3 - 6t$

Ta có cặp số (-1; 4) là nghiệm riêng của pt $15y + 4z = 1$ nên $(-3 + 6t; 12 - 24t)$ là nghiệm riêng của ph- ơng trình

Do đó nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} 15y + 4z = 3 - 6t \\ y = -3 + 6t + 4k \\ z = 12 - 24t - 15k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

lại có $t = x + z \Rightarrow x = t - z$ $\Rightarrow x = -12 = 25t + 15k$

Vậy nghiệm tổng quát của ph- ơng trình $6x + 15y + 10z = 3$ là:

$$\begin{cases} x = -12 = 25t + 15k \\ y = -3 + 6t + 4k \\ z = 12 - 24t - 15k \end{cases} \quad \text{với } (t, k \in \mathbb{Z})$$

**III. Ph- ơng trình nghiêm nguyên đ- a về dang**

**$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ (3) Với $a \in \mathbb{Z}$**

**1.Cách giải:**

Đặt $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m$ (với m là - ớc của a)

$\Rightarrow$ $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{m}{a}$

Giải hệ: $\begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{m}{a} \end{cases}$

tìm đ- ợc $x_1, x_2, \ldots, x_n$

thử vào (3) ta đ- ợc nghiệm của ph- ơng trình.

**2.Chú ý:**

-Nếu a = 0 ta có $\begin{cases} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$

-Nếu $a = p^{\alpha}$ với p nguyên tố thì từ pt (3) ta có: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p^{\alpha_1}$

$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p^{\alpha_2}$

Với $\alpha_1 + \alpha_2 = a$

<u>Ví dụ 5:</u> Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $x - y + 2xy = 6$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $x - y + 2xy = 6 \Leftrightarrow 2x - 2y + 4xy = 12$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 4xy - 1 = 11$

$\Leftrightarrow (2x - 1) + 2y(2x-1) = 11$

$\Leftrightarrow$ $(2x - 1)(2y + 1) = 11$

Ta có 11 = 1.11= (-1)(-11) = 11.1 = (-11)(-1)

Ta có $\begin{cases} 2y + 1 = 1 \\ 2x - 1 = 11 \end{cases}$ $\Rightarrow (x; y) = (6; 0)$

$\begin{cases} 2y + 1 = -1 \\ 2x - 1 = -11 \end{cases}$ $\Rightarrow (x; y) = (-5; -1)$

$\begin{cases} 2y + 1 = 11 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow (x; y) = (1, 5)$

$\begin{cases} 2y + 1 = -11 \\ 2x - 1 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow (x; y) = (0; -6)$

**<u>Ví du 6</u>: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình**

$$\mathbf{1 + x + x^2 + x^3 = 2^y}$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y \Leftrightarrow (1 + x)(1 + x^2) = 2^y$

$\Rightarrow 1 + x = 2^m$ và $1 + x^2 = 2^{y-m}$ (m nguyên d- ơng)

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2^m - 1 \\ x^2 = 2^{y-m} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 \\ x^2 = 2^{y-m} - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 = 2^{y-m} - 1$

$\Rightarrow 2^{y-m} - 2^{2m} + 2^{m+1} = 2$

Nếu $m = 0 \Rightarrow x = 0$ ; $y = 0$ (t/m)

Nếu $m > 0 \Rightarrow 2^{y-m-1} - 2^{2m-1} + 2^m = 1$ mà $2^{2m-1}$và $2^m$ đều là số chẵn nên:

$\Rightarrow 2^{y-m-1}$ lẻ $\Rightarrow 2^{y-m-1} = 1 \Rightarrow y - m - 1 = 0 \Rightarrow y = m + 1$

$\Rightarrow 2^m - 2^{2m-1} = 0 \Rightarrow 2^m = 2^{2m-1} \Rightarrow m = 2m - 1 \Rightarrow m = 1$

$\Rightarrow y = 2$ ; $x = 1$

Vậy (x, y) = (0; 0); (1; 2)

## IV. Ph- ơng trình nghiêm nguyên đ- a về dang

$$[g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 + [g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 + \ldots + [g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 = 0$$

**1.Cách giải:** Ta thấy vế trái của ph- ơng trình là các số hạng không âm, tổng của chúng bằng 0 nên mỗi số hạng phải bằng 0

Do vậy có:
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta đ- ợc $x_1, x_2, \ldots, x_n$

**<u>Ví du 7</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$2x^2 + y^2 \square 2xy + 2y \square 6x + 5 = 0$$

**H- ớng dẫn:**

(Dùng ph- ơng pháp phân tích thành nhân tử ta biến đổi vế trái của ph- ơng trình)

Ta có $\quad 2x^2 + y^2 - 2xy + 2y - 6x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y(x - 1) + (x-1)^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y - x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$

Vậy $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên của ph- ơng trình là $x = 2$ ; $y = 1$

**<u>Ví du 8</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình : $(x \square 1)(y+1) = (x+y)^2$**

**H- ớng dẫn:**

Ta có $\quad (x-1)(y+1) = (x+y)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(y+1) = [(x-1) + (y+1)]^2$

$\Leftrightarrow \quad [(x-1) + (y+1)]^2 - (x-1)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad [(x-1) + \frac{1}{2}(y+1)]^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = 0 \\ (x-1) + \frac{1}{2}(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của ph- ơng trình là ( x = 1 ; y = -1)

**V- Ph- ơng trình nghiệm nguyên mà các ẩn có vai trò bình đẳng**

Khi làm toán ta th- ờng gặp một số bài toán mà trong đó các ẩn bình đẳng với nhau . Để giải các bài toán đó có nhiều cách giải khác nhau tuỳ thuộc vào từng loại cụ thể. □ đây ta nghiên cứu đến 1 ph- ơng pháp giải toán này:

Ta giả sử các ẩn xảy ra theo một trật tự tăng dần rồi tiến hành giải

**Ví du 9: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình**

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} = \mathbf{1}$$

**H- ớng dẫn:**

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow x^2 \leq xy \leq xz \leq yz \leq xyz$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \frac{12}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 12 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$$

Nếu $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{9}{yz} = 1$

$\Rightarrow z + 1 + y + 9 = yz$

$\Rightarrow yz - z - y + 1 = 11$

$(y- 1)(z - 1) = 11$

$\Rightarrow y = 2 ; z = 12$ hoặc $z = 2 ; y = 12$

Nếu $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{2z} + \frac{9}{2yz} = 1$

$\Rightarrow (2y - 1)(2z-1) = 23 \Rightarrow y = 1; z = 12$ hoặc $y = 12; z = 1$

Nếu $x = 3 \Rightarrow (3y - 1)(3z - 1) = 37$ vô nghiệm

Vậy (x, y, z) = (1; 2, 12) và các hoán vị

**Ví du 10: Tìm x, y, z nguyên của ph- ơng trình**

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = \mathbf{3}$$

**H- ớng dẫn:**

Vì x, y, z bình đẳng nên ta giả sử $0 < x \leq y \leq z$

$\Rightarrow 3 = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} = x\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{yz}{x} \geq 2x + x$

$\Rightarrow 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x = 1$

Với x = 1 ta có $3 = \frac{y}{z} + yz + \frac{z}{y} \geq 2 + yz$

$\Rightarrow yz \leq 1 \Rightarrow y = 1 ; z = 1$

Vậy nghiệm của pt (1,1,1)

**<u>Ví du 11</u>: Chứng minh rằng ph- ơng trình sau không có nghiệm tự nhiên**

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1 \ (x,y \neq 0)$$

**H- ớng dẫn:**

Vì x, y có vai trò bình đẳng . Ta giả sử $1 \leq x \leq y$

Ta có $x^2 \leq xy \leq y^2$ (giả sử ph- ơng trình có nghiệm tự nhiên)

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} \leq \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 3$

$\Rightarrow x = 1$( vì $x \in N^*$ ) $\Rightarrow 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y2} = 1$ (vô nghiệm)

$\Rightarrow$ ph- ơng trình không có nghiệm là số tự nhiên.

## CH- ƠNG II: *Một số ph□ơng pháp giải ph□ơng trình nghiệm nguyên*

Không có ph- ơng pháp chung để giải ph- ơng trình nghiệm nguyên nh- ng để giải nó ng- ời ta th- ờng áp dụng một số ph- ơng pháp sau hoặc kết hợp các ph- ơng pháp tuỳ theo từng bài cụ thể. Sau đây là một số ph- ơng pháp th- ờng dùng

**<u>I- Ph- ơng pháp 1</u> : Sử dụng tính chẵn lẻ**

**<u>Ví du 12</u>: Tìm x, y nguyên tố thoả mãn**

$$y^2 \square 2x^2 = 1$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $y^2 - 2x^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 1 \Rightarrow$ y là số lẻ

Đặt y = 2k + 1 (với k nguyên).Ta có $(2k + 1)^2 = 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 2k^2 + 2k \Rightarrow$ x chẵn , mà x nguyên tố $\Rightarrow x = 2, y = 3$

**<u>Ví du 13</u>: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình**

$$(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) = 105$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có: $(2x + 5y + 1)(2^{|x|} + y + x^2 + x) = 105$

Ta thấy 105 lẻ $\Rightarrow$ 2x + 5y + 1 lẻ $\Rightarrow$ 5y chẵn $\Rightarrow$ y chẵn

$2^{|x|} + y + x^2 + x = 2^{|x|} + y + x(x+1)$ lẻ

có x(x+ 1) chẵn, y chẵn $\Rightarrow 2^{|x|}$ lẻ $\Rightarrow 2^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$

Thay x = 0 vào ph- ơng trình ta đ- ợc

$(5y + 1)(y + 1) = 105$

$5y^2 + 6y - 104 = 0$

$\Rightarrow y = 4$ hoặc $y = \frac{-26}{5}$ ( loại)

Thử lại ta có x = 0; y = 4 là nghiệm của ph- ơng trình

**II. Ph- ơng pháp 2 : Ph- ơng pháp phân tích**

**Thực chất là biến đổi ph- ơng trình về dạng:**

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$$

**Ví du 14: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2$$

**H- ớng dẫn**: Ta có: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = y^2$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^4 - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow [(x+1)^2 - y][(x+1)^2 + y] = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+1)^2 - y = 1 \\ (x+1)^2 + y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)^2 - y = -1 \\ (x+1)^2 + y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + y = 1 - y \\ \\ -1 + y = -1 - y \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x+1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

Vậy ( x, y ) = ( 0, 0 ); ( - 2, 0 )

**Ví du 15: Tìm x, y nguyên sao cho ( x + y ) P = xy với P nguyên tố.**

**Giải**

Ta có **( x + y ) P = xy** với xy — Px — Py = 0

$\Leftrightarrow$ x ( y — P ) — ( Py — $P^2$) = $P^2$

$\Leftrightarrow$ ( y- P ) ( x- P ) = $P^2$

Mà P nguyên tố $\Rightarrow$ $P^2 = 1.P^2 = P.P = (-1)(-P^2) = ( -P ) (-P)$

$\Rightarrow$ Các cặp số (x,y ) là:

(P+1, P(P+1) ); ( P-1, P (P-1) ); (2p, 2p); (0,0) và các hoán vị của chúng.

__Ph- ơng pháp 3__ **: Ph- ơng pháp cực hạn**

***Sử dụng đối với 1 số bài toán vai trò của các ẩn bình đẳng nh nhau:***

__Ví du 16__**: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình:**

$$\mathbf{5 ( x + y + z + t ) + 10 = 2 xyzt}$$

**H- ớng dẫn:**

Ta giả sử $x \ge y \ge z \ge t \ge 1$

Ta có: 5 ( x + y + z + t ) + 10 = 2 xyzt

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{5}{yzt} + \frac{5}{xzt} + \frac{5}{xyt} + \frac{5}{xyz} + \frac{10}{xyzt} \le \frac{30}{t^3}$$

$\Rightarrow t^3 \le 15 \Rightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$

* Với t = 1 ta có 5 (x+ y + z + 1) + 10 = 2 xyz

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{5}{yz} + \frac{5}{xz} + \frac{5}{xy} + \frac{15}{xyz} \le \frac{30}{z^2}$$

$\Rightarrow z^2 \le 15 \Rightarrow z = \{1;2;3\}$

Nếu z = 1 có 5 (x+ y ) + 20 = 2xy

$\Leftrightarrow$ (2x — 5) (2y - 5) = 65

$\Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}$

Ta đ- ợc nghiệm ( 35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1) và các hoán vị của chúng

Với z = 2; z = 3 ph- ơng trình không có nghiệm nguyên

* Với t = 2 thì 5 (x+ y + z ) + 20 = 4 xyz

$\Leftrightarrow 4 = \frac{5}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{5}{xz} + \frac{20}{xyz} \leq \frac{35}{z^2}$

$\Rightarrow z^2 \leq \frac{35}{4} \leq 9 \Rightarrow z = 2$ (vì $z \geq t \geq 2$)

$\Rightarrow (8x - 5)(8y - 5) = 265$

Do $x \geq y \geq z \geq 2$ nên $8x - 5 \geq 8y - 5 \geq 11$

$\Rightarrow (8x - 5)(8y - 5) = 265$ vô nghiệm

vậy nghiệm của ph- ơng trình là bộ (x, y, z)

= ( 35; 3; 1; 1); (9; 5; 1; 1)   và các hoán vị

**<u>Ví du 17</u>: Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình**

$$x + y + z + t = xyzt$$

## H- ớng dẫn:

Ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq t$

có $xyzt = x + y + z + t \leq 4t$

Vì t nguyên d- ơng $\Rightarrow xyz \leq 4 \Rightarrow xyz \in \{1,2,3,4\}$

Nếu $xyz = 1 \Rightarrow x = y = z = 1 \Rightarrow 3+t = t$ ( loại)

Nếu $xyz = 2$ mà $x \leq y \leq z \Rightarrow x = 1; y=1; z = 2 \Rightarrow t = 4$

Nếu $xyz = 3$ mà $x \leq y \leq z \Rightarrow x = 1; y=1; z = 3 \Rightarrow t = 5/2$ ( loại )

Nếu $xyz = 4$ mà $x \leq y \leq z \Rightarrow x = 1; y=1; z = 4$ hoặc $x = 1; y=2; z = 2 \Rightarrow t = 2$ ( loại vì $t \geq z$) hoặc $t = 5/4$ ( loại )

Vậy nghiệm của ph- ơng trình là bộ ( x;y;z) = (1;1;2;4) và các hoán vị của chúng.

**<u>IV- Ph- ơng pháp loai trừ ( ph- ơng pháp 4 )</u>**

***Khẳng định nghiệm rồi loại trừ các giá trị còn lại của  ẩn***

**<u>Ví du 18</u>*:* Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình**

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2$$

## H- ớng dẫn:

Với $x \geq 5$ thì  x!  có tận cùng là 0 và 1! + 2! + 3! + 4! Có tận cùng là 3

$\Rightarrow$ 1! + 2! + … + x! có tận cùng là 3, không là số chính ph- ơng (loại)

Vậy $x < 5$ mà x nguyên d- ơng nên:

$x = \{1;2;3;4\}$

Thử vào ph- ơng trình ta đ- ợc (x = 1, y= 2); (x = 3, y= 3) là thoả mãn

**<u>Ví du 19</u>: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có : $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$

$\Leftrightarrow$ $4y^2 + 4y + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$

$\Rightarrow (2x^2 + x)^2 - (2y + 1)^2 = (3x + 1)(x + 1)$

hay $(2x^2 + x + 1)^2 - (2y + 1)^2 = x(x-2)$

Ta thấy:

Nếu $x > 0$ hoặc $x < -1$ thì $(3x + 1)(x + 1) > 0$

Nếu $x > 2$ hoặc $x < -1$ thì $x(x-2) > 0$

$\Rightarrow$ Nếu $x>2$ hoặc $x< 1$ thì $(2x^2 + x) <(2y+1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$ (loại)

$\Rightarrow -1 \le x \le 2 \Rightarrow x = 0, 1, -1, 2$

Xét $x = 2 \Rightarrow y^2 + y = 30 \Rightarrow y = 5$ hoặc $y = -6$

Xét $x = 1 \Rightarrow y^2 + y = 4$ (loại)

Xét $x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$

Xét $x = -1 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$

Vậy nghệm nguyên của ph- ơng trình là:

(x,y) = (2, 5); (2, -6); (0, 0); (0, -1); (-1;0); (-1, -1)

**V.<u>Ph- ơng pháp 5</u>: Dùng chia hết và có d-**

**<u>Ví du 20</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 - 2y^2 = 5$$

**H- ớng dẫn:**

$$\left.\begin{array}{r}\text{Xét } x \vdots 5 \text{ mà } x^2 - 2y^2 = 5 \Rightarrow 2y^2 \vdots 5 \\ (2,5) = 1\end{array}\right| \begin{array}{l}\Rightarrow y^2 \vdots 5 \\ 5 \text{ là số nguyên tố}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow y^2 \vdots 25 \\ \text{lại có } x \vdots 5 \Rightarrow x^2 \vdots 25\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}x^2 - 2y^2 \vdots 25 \\ 5 \not\vdots 25 \text{ loại}\end{array}$$

Xét $x \not\vdots 5 \Rightarrow y \not\vdots 5$

và $x^2$ chia cho 5 có các số d- 1 hoặc 4

$y^2$ chia cho 5 có các số d- 1 hoặc 4 $\Rightarrow 2y^2$ chia cho 5 d- 2 hoặc 3

$\Rightarrow x^2 - 2y^2$ chia cho 5 d- $\pm 1$ hoặc $\pm$ 2(loại)

Vậy ph- ơng trình $x^2 - 2y^2 = 5$ vô nghiệm

**Ví du 21: Tìm x, y là số tự nhiên thoả mãn**

$$x^2 + 3^y = 3026$$

**H- ớng dẫn:**

Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 + 3^0 = 3026 \Rightarrow x^2 = 3025$

mà $x \in N \Rightarrow x = 55$

Xét $y > 0 \Rightarrow 3^y \vdots 3$, $x^2$ chia cho 3 d- 0 hoặc 1

$\Rightarrow x^2 + 3^y$ chia cho 3 d- 0 hoặc 1

mà 3026 chia cho 3 d- 2 (loại)

Vậy nghiệm $(x,y) = (55,0)$

**VI. Ph- ơng pháp 6 : Sử dụng tính chất của số nguyên tố**

**Ví du 22: Tìm x, y, z nguyên tố thoả mãn**

$$x^y + 1 = z$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có x, y nguyên tố và $x^y + 1 = z \Rightarrow z > 3$

Mà z nguyên tố $\Rightarrow$ z lẻ $\Rightarrow x^y$ chẵn $\Rightarrow$ x chẵn $\Rightarrow x = 2$

Xét $y = 2 \Rightarrow 2^2 + 1 = 5$ là nguyên tố $\Rightarrow z = 5$ (thoả mãn)

Xét $y > 2 \Rightarrow y = 2k + 1$ $(k \in N)$

$\Rightarrow 2^{2k+1} + 1 = z \Rightarrow 2.\ 4^k + 1 = z$

Có 4 chia cho 3 d- 1 $\Rightarrow (2.4^k+1) \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3$ (loại)

Vậy $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$ thoả mãn

**Ví du 23 : Tìm số nguyên tố p để 4p + 1 là số chính ph- ơng**

**H- ớng dẫn:**

đặt $4p + 1 = x^2$ $(x \in N)$

$\Rightarrow$ x lẻ đặt $x = 2k + 1$ $(k \in N)$

$\Rightarrow 4p + 1 = (2k + 1)^2 \Leftrightarrow 4p + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow p = k(k+1)$

$\Leftrightarrow k(k + 1)$ chẵn $\Rightarrow$ p chẵn, p nguyên tố $\Rightarrow p = 2$

**<u>VII. Ph- ơng pháp 7</u>: Đ- a về dạng tổng**

**<u>Ví du 24</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 + y^2 - x - y = 8$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $x^2 + y^2 - x - y = 8$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$

$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 34$

Bằng ph- ơng pháp thử chọn ta thấy 34 chỉ có duy nhất 1 dạng phân tích thành tổng của 2 số chính ph- ơng $3^2$ và $5^2$

Do đó ta có $\begin{cases} |2x-1| = 3 \\ |2y-1| = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |2x-1| = 5 \\ |2y-1| = 3 \end{cases}$

Giải ra ta đ- ợc (x,y) = (2,3); (2,-2); (-1, -2); (-1, 3) và các hoán vị của nó.

**<u>Ví du 25</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$$

**H- ớng dẫn:** Ta có $x^2 - 4xy + 5y^2 = 169$

$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + y^2 = 169$

Ta thấy $169 = 0^2 + 13^2 = 5^2 + 12^2$

$\Rightarrow \begin{cases} |x-2y| = 0 \\ |y| = 13 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 13 \\ |y| = 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 5 \\ |y| = 12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} |x-2y| = 12 \\ |y| = 5 \end{cases}$

Giải ra ta đ- ợc (x, y) = (29, 12);(19, 12); (-19, -12); (22, 5); (-2, 5) ;(2, -5); (-22, -5); (26, 13); (-26, -13); (-13. 0); (13, 0)

**<u>VIII .Ph- ơng pháp 8</u>: Lùi vô hạn**

**<u>Ví du 26</u>: Tìm nghiệm nguyêm của ph- ơng trình**

$$x^2 \square 5y^2 = 0$$

**H- óng dẫn:**

Giả sử $x_0$, $y_0$ là nghiệm của ph- ơng trình $x^2 — 5y^2 = 0$

ta có $x_0^2 - 5y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 \vdots 5$ đặt $x_0 = 5x_1$

Ta có $(5x_1)^2 — 5y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 5x_1^2 - y_0^2 = 0$

$\Rightarrow y_0 \vdots 5$ đặt $y_0 = 5y_1 \Rightarrow x_1^2 - 5y_1^2 = 0$

Vây nếu $(x_0,,y_0)$ là nghiệm của ph- ơng trình đã cho thì

$(\frac{x_0}{5}, \frac{y_0}{5})$ cũng là nghiệm của ph- ơng trình đã cho. Cứ tiếp tục lập luận nh- vậy $(\frac{x_0}{5^k}, \frac{y_0}{5^k})$ với k nguyên d- ơng bất kỳ cũng là nghiệm của ph- ơng trình. Điều này xảy ra khi $x_0 = y_0 = 0$

Vậy ph- ơng trình có nghiệm duy nhất là x = y = 0

**<u>Ví du 27</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$$

**H- óng dẫn:**

Nếu x, y đều là số lẻ $\Rightarrow x^2$ , $y^2$ chia cho 4 đều d- 1

$$\left.\begin{array}{r} x^2y^2 \text{ chia cho 4 d- 1} \\ x^2 + y^2 \text{ chia cho 4 d- 2} \\ \text{mà } x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2 \end{array}\right\} \quad z^2 \text{ chia cho 4 d- 3 (loại)}$$

$\Rightarrow$ x chẵn hoặc y chẵn

* Giả sử x chẵn $\Rightarrow$ hoặc y chẵn

* Giả sử x chẵn $\Rightarrow x^2$ , $x^2y^2$ chẵn

$\Rightarrow x^2 \vdots 4 \Rightarrow x^2 y^2 \vdots 4 \Rightarrow (y^2 + z^2) \vdots 4 \Rightarrow$ y và z phải đồng thời chẵn

Đặt $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ ta có

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_1^2 y_1^2$

lập luận t- ơng tự ta có $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16\, x_2^2 y_2^2$

Quá trình này cứ tiếp tục ta thấy $(x_1, y_1, z_1)$ là nghiệm của ph- ơng trình thì $\left(\frac{x_1}{2^k}, \frac{y_1}{2^k}, \frac{z_1}{2^k}\right)$ là nghiệm của ph- ơng trình với k nguyên d- ơng

$\Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 = 0$

Vậy pt có nghiệm là (0, 0, 0)

## <u>IX. Ph- ơng pháp 9</u>: Sử dụng tính chất nghiệm của ph- ơng trình bậc 2

Biến đổi ph- ơng trình về dạng ph- ơng trình bậc 2 của ẩn coi các ẩn khác là tham số, sử dụng các tính chất về nghiệm của ph- ơng trình bậc 2 để xác định giá trị của tham số

**<u>Ví du 28</u>: Giải ph- ơng trình nghiệm nguyên**

$$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có pt $3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + (4x + 2)y + 3x^2 + 4x + 5 = )$ (*) coi x là tham số giải ph- ơng trình bậc 2 pt (*) ẩn y ta có $y = -(2x + 1) \pm \sqrt{\Delta'_x}$

Do y nguyên, x nguyên $\Rightarrow \sqrt{\Delta'_x}$ nguyên

Mà $\Delta'_x = (2x + 1)^2 - (3x^2 + 4x + 5) = x^2 - 4$

$\Rightarrow x^2 - 4 = n^2$ $(n \in Z)$

$\Rightarrow (x - n)(x + n) = 4$ $\Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow x - n = x + n = \pm 2$

Vậy ph- ơng trình có nghiệm nguyên

(x, y) = (2; -5); (-2, 3)

**<u>Ví du 29</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 \square (y+5)x + 5y + 2 = 0$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $x^2 — (y+5)x + 5y + 2 = 0$ coi y là tham số ta có ph- ơng trình bậc 2 ẩn x. Giả sử ph- ơng trình bậc 2 có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$

Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = y + 5 \\ x_1 x_2 = 5y + 2 \end{cases}$ Theo định lý Viet

$\Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 5y + 25 \\ x_1x_2 = 5y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 5x_1 + 5x_2 — x_1x_2 = 23$

$\Leftrightarrow (x_1 -5)(x_2 -5) = 2$ Mà $2 = 1.2 = (-1)(-2)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 13$ hoặc $x_1 + x_2 = 7 \Rightarrow y = 8$ hoặc $y = 2$

thay vào ph- ơng trình ta tìm đ- ợc các cặp số

(x,y ) = (7, 8); (6, 8); (4, 2); (3, 2); là nghiệm của ph- ơng trình

<u>X- **Ph- ơng pháp 10**</u> **: Dùng bất đẳng thức**

**<u>Ví du 30</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$x^2 \square xy + y^2 = 3$$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $x^2 —xy + y^2 = 3 \Leftrightarrow (x- \frac{y}{2})^2 = 3 - \frac{3y^2}{4}$

Ta thấy $(x- \frac{y}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow 3 - \frac{3y^2}{4} \geq 0 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$

$\Rightarrow y= \pm 2; \pm1; 0$ thay vào ph- ơng trình tìm x

Ta đ- ợc các nghiệm nguyên của ph- ơng trình là :

(x, y) = (-1,-2), (1, 2); (-2, -1); (2,1) ;(-1,1) ;(1, -1)

**<u>Ví du 31</u>: Chứng minh rằng ph- ơng trình**

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ **= b không có nghiệm tự nhiên khi b = 1 hoặc b = 2 nh- ng có vô số nghiệm tự nhiên khi b = 3**

**H- ớng dẫn:**

Ta thấy x, y, z $\in Z^+ \Rightarrow \frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x} > 0$ Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x})^3 \geq 27 (\frac{x}{y} \frac{y}{z} \frac{z}{x}) = 27$

$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ Đẳng thức xảy ra khi x = y = z

Vậy ph- ơng trình $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ = b không có nghiệm là số tự nhiên khi b = 1 hoặc b = 2 và có vô số nghiệm khi b = 3 chẳng hạn ( x = a, y = a, z = a) với a là số tự nhiên bất kỳ.

## CH- ƠNG III: *Bài tập luyện tập rèn l□ duy sáng tạo*

**Bài 1:Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$2x + 3y = 11$$

**H- ớng dẫn**

**Cách 1**: Ta thấy ph- ơng trình có cặp nghiệm đặc biệt là $x_0 = 4$, $y_0 = 1$

Vì $2.4 + 3.1 = 11$

$\Rightarrow (2x + 3y) - (2.4 + 3.1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-4) + 3(y-1) = 0$

$\Rightarrow 2(x-4) = -3(y-1)$ mà $(2,3) = 1$

Đặt $x - 4 = 3k$ và $y - 1 = 2k$ với $(k \in Z)$

Vậy nghiệm tổng quát của pt là : $\begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 1 + 2k \end{cases}$ $(k \in Z)$

***Nhận xét:** Theo cách giải này phải tìm ra 1 cặp nghiệm nguyên đặc biệt $(x_0, y_0)$ của ph- ơng trình vô định $ax + by = c$

Nếu ph- ơng trình có hệ số a, b, c lớn thì cách giải khó khăn.

**Cách 2:** Dùng tính chất chia hết.

Ta có $2x + 3y = 11$

$\Rightarrow x = \dfrac{11-3y}{2} = 5 - y - \dfrac{y-1}{2}$

Do x, y nguyên $\Rightarrow \dfrac{y-1}{2}$ nguyên

đặt $\dfrac{y-1}{2} = k \Rightarrow y = 2k + 1 \Rightarrow x = 4 - 3k$ $(k \in Z)$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} y = 2k + 1 \quad (k \in Z) \\ x = 4 - 3k \end{cases}$

**Bài 2: Tìm cặp số nguyên d- ơng (x,y) thoả mãn ph- ơng trình**

$$6x^2 + 5y^2 = 74$$

**H- ớng dẫn:**

**Cách 1**: Ta có $6x^2 + 5y^2 = 74$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$

$\Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$

$\Rightarrow 6(x^2 - 4) \vdots 5 \quad \Rightarrow x^2 - 4 \vdots 5$

$(6, 5) = 1$

$\Rightarrow x^2 = 5t + 4$ $(t \in N)$

Thay $x^2 - 4 = 5t$ vào ph- ơng trình $\Rightarrow y^2 = 10 - 6t$

lại có $\begin{cases} x^2 > 0 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > \dfrac{-4}{5} \\ \end{cases}$

$y^2 > 0$ $\qquad\qquad t < \frac{5}{3}$

$\Rightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$

với $t = 0$ ta có $x^2 = 4$, $y^2 = 10$ (loại)

Với $t = 1$ ta có $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

mà $x, y \in Z^+ \Rightarrow x = 3, y = 2$ thoả mãn

<u>**Cách 2**</u>: Sử dụng tính chẵn lẻ và ph- ơng pháp chặn

Ta có $6x^2 + 5y^2 = 74$ là số chẵn $\Rightarrow$ y chẵn

lại có $0 < 6x^2 \Rightarrow 0 < 5y^2 < 74$

$\Leftrightarrow 0 < y^2 < 14 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 9$

Cặp số (x,y) cần tìm là (3, 2)

<u>**Cách 3:**</u> Ta có $6x^2 + 5y^2 = 74$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + x^2 + 1 = 75$

$\Rightarrow x^2 + 1 \vdots 5$

mà $0 < x^2 \le 12 \Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$

Với $x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10$ loại

Với $x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4$ thoả mãn

cặp số (x,y) cần tìm là (3, 2)

<u>**Bài 3:**</u> **Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình:**

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 2x^2y^2}$$

**H- ớng dẫn:**

<u>**Cách 1**</u>:

Đặt $x^2 = a$, $y^2 = b$

Ta có $a + b = 2ab \Rightarrow \begin{cases} a \vdots b \\ b \vdots a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

Nếu $a = b \Rightarrow 2a = 2a^2 \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow a = 0, a = 1$

$\Rightarrow (a,b) = (0, 0); (1, 1)$

Nếu $a = -b \Rightarrow 2b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$

$\Rightarrow (x^2, y^2) = (0, 0); (1, 1)$

$\Rightarrow (x, y) = (0, 0); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1); (1, 1)$

<u>**Cách 2:**</u>

Ta có $x^2 + y^2 = 2x^2y^2$

Do $x^2, y^2 \ge 0$

Ta giả sử $x^2 \le y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 2y^2$

$\Rightarrow 2x^2 y^2 \leq 2y^2$

Nếu y = 0 ph- ơng trình có nghiệm (0;0)

Nếu $y \neq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 = 0$ hoặc $x^2 = 1$

$\Rightarrow y^2 = 0$ (loại) hoặc $y^2 = 1 \Rightarrow (x, y) = (1, 1); (1, -1) ; (-1, 1)$

Vậy ph- ơng trình có nghiệm (x;y) =(0, 0); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1) ; (1, 1)

**<u>Cách 3:</u>**

Có $x^2 + y^2 = 2x^2y^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 4x^2y^2$

$\Leftrightarrow 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 1$

$2x^2 (2y^2 - 1) - (2y^2 - 1) = 1$

$\Leftrightarrow (2x^2 - 1)(2y^2 - 1) = 1$

Mà $1 = 1.1 = (-1)(-1) \Rightarrow (x^2, y^2) = (1, 1); (0, 0)$

$\Rightarrow (x, y) = (1, 1); (0, 0) ; (1, -1); (-1; -1); (-1, 1)$

**<u>Bài 4:</u> Tìm nghiệm tự nhiên của ph- ơng trình**

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

**H- ớng dẫn:**

Ta thấy(x, y) = (0, 0) không phải là nghiệm của ph- ơng trình

Ta coi ph- ơng trình $x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$ ẩn x ta tính $\Delta_y = y^2 - 24$

Ph- ơng trình có nghiệm tự nhiên thì $\Delta_y$ là số chính ph- ơng

$\Rightarrow y^2 - 24 = k^2 \Rightarrow (y - k)(y + k) = 24$ $(k \in N)$

mà 24 = 24.1 = 12.2 = 6.4 = 3.8 ; y+k và y — k cùng chẵn

$\Rightarrow \begin{cases} y + k = 6 \\ y - k = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 5$ hoặc $\begin{cases} y + k = 12 \\ y - k = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 7$

Thay vào ta tìm đ- ợc (x,y) = (8, 7); (13, 7); (7, 5); (8,5)

**<u>Bài 5</u>: Tìm nghiệm nguyên của ph- ơng trình**

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + y + x - 10 = 0$$

**H- ớng dẫn:**

<u>**Cách 1**</u>:

Ta có ph- ơng trình đã cho $\Leftrightarrow 2x^2 - (2y-1)x + 2y^2 + y - 10 = 0$

Coi x là ẩn y là tham số ta có ph- ơng trình bậc 2 ẩn x

Xét $\Delta_y = (2y - 1)^2 - 4.2(2y^2 + y - 10) = -12y^2 - 12y + 81$

Để nghiệm x nguyên thì $\Delta_y$ là số chính ph- ơng

Đặt $k^2 = -12y^2 - 12y + 81 \Rightarrow k^2 + 3(2y + 1) = 84$

$\Rightarrow (2y + 1)^2 = 28 - \frac{k^2}{3} \leq 28$; $(2y + 1)^2$ lẻ $\Rightarrow (2y + 1)^2 = 1, 9, 25$

$\Rightarrow$ y = 0, 1, -2, 2, -3 thử trực tiếp vào ph- ơng trình ta tìm đ- ợc các cặp số (x, y) = (2, 0); (0, 2) thoả mãn

**Cách 2:**

Đặt x + y = a, xy = b ta có $x, y \in Z \Rightarrow a, b \in Z$

ph- ơng trình $2x^2 - (2y-1)x + 2y^2 + y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 4b + a - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 8b + 2a - 20 = 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + 3a^2 - 8b - 21 = 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 + 3a^2 = 8b + 21$

lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow a^2 \geq 4b$

$\Rightarrow 8b + 21 \leq 2a^2 + 21$

$\Rightarrow (a+1)^2 + 3a^2 \leq 2a^2 + 21$

$\Rightarrow (a+1)^2 \leq 21$

mà $(a+1)^2$ là số chính ph- ơng $\Rightarrow (a+1)^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$

$\Rightarrow a \in \{0, 1, 2, 3\}$

Với $a = 0 \Rightarrow 1^2 + 3.0 = 8b + 21 \Rightarrow 8b = 20$ loại

Với $a = 1 \Rightarrow (1+1)^2 + 3.1^2 = 8b + 21 \Rightarrow 8b = -14$ loại

Với $a = 2 \Rightarrow (1+2)^2 + 3.2^2 = 8b + 21 \Rightarrow 8b = 0 \Rightarrow b = 0$

Với $a = 3 \Rightarrow (1+3)^2 + 3.3^2 = 8b + 21 \Rightarrow 8b = 22$ loại

Vậy đ- ợc a = 2, b = 0 $\Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (x, y ) = (0, 2); (2, 0) thoả mãn

**Bài 6 :Tìm tất cả các nghiệm nguyên d- ơng x, y sao cho**

$$x^2 + 4x \square y^2 = 1$$

**H- ớng dẫn:**

**Cách 1**:

Ta có $x^2 + 4x - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - y^2 = 5$

$\Leftrightarrow (x + 2 + y)(x + 2 - y) = 5$

mà x, y nguyên d- ơng $\Rightarrow (x + 2 + y) > (x + 2 - y)$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 + y = 5 \\ x + 2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2$

Vậy nghiệm của ph- ơng trình là x = 1, y = 2

**Cách 2**:

Ta có $x^2 + 4x - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - (y^2 + 1) = 0$

$\Delta'_y = 4 + y^2 + 1 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{\Delta'_y}}{1}$

Để ph- ơng trình có nghiệm thì $\Delta'_y$ là số chính ph- ơng $\Rightarrow 4 + y^2 + 1 = k^2$

$\Leftrightarrow (k-y)(k+y) = 5 \Rightarrow y = 2$

thay vào ph- ơng trình tìm đ- ợc x = 1

Vậy nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình là x = 1; y = 2

**Bài 7: Hai đội cờ thi đấu với nhau mỗi đấu thủ của đội này phải đấu 1 ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết rằng tổng số ván cờ đã đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội và biết rằng số đấu thủ của ít nhất trong 2 đội là số lẻ hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ.**

***H- ớng dẫn:***

Gọi x, y lần l- ợt là số đấu thủ của đội 1 và đội 2 (x, y nguyên d- ơng )

Theo bài ra ta có xy = 4 (x + y)

Đây là ph- ơng trình nghiệm nguyên ta có thể giải bằng các cách sau:

**Cách 1**: Có xy = 4(x + y)

$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 16$

$\Leftrightarrow (x-4)(y-4) = 16$

mà 16 = 1.16 = 2.8 = 4.4

lại có ít nhất 1 đội có số đấu thủ lẻ

$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 1 \\ y - 4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 20 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$

**Cách 2:** Ta thấy x, y bình đẳng.Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \leq y$

Ta có x, y nguyên d- ơng xy = 4 (x + y)

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = 1$

lại có $\dfrac{4}{x} \geq \dfrac{4}{y} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} \leq \dfrac{8}{x} \Leftrightarrow \dfrac{8}{x} \leq 1$

$\Rightarrow x \leq 8$ $\Rightarrow$ x= 5, 6, 7, 8

Mà $\dfrac{4}{x} \leq 1 \Rightarrow x > 4$

Thử trực tiếp ta đ- ợc x = 5, y = 20 (thoả mãn)

Vậy 1 đội có 5 đấu thủ còn đội kia có 20 đấu thủ

**<u>Bài 8</u>: Tìm năm sinh của Bác Hồ biết rằng năm 1911 khi Bác ra đi tìm đ- ờng cứu n- ớc thì tuổi Bác bằng tổng các chữ số của năm Bác sinh cộng thêm 3.**

**H- ớng dẫn:**

Ta thấy nếu Bác Hồ sinh vào thể kỷ 20 thì năm 1911 Bác nhiều nhất là 11 tuổi (1+ 9 + 0 + 0 + 3) loại

Suy ra Bác sinh ra ở thế kỷ 19

Gọi năm sinh của Bác là $\overline{18xy}$

(x, y nguyên d- ơng, x, y ≤ 9)

Theo bài ra ta có

$1911 - \overline{18xy} = 1 + 8 + x + y = 3$

$\Leftrightarrow 11x + 2y = 99$

$\Rightarrow 2y \vdots 11$ mà $(2, 11) = 1 \Rightarrow y \vdots 11$

mà $0 \le y \le 9$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 9$

Vậy năm sinh của Bác Hồ là 1890

**<u>Bài 9:</u> Tìm tất cả các số nguyyên x, y thoả mãn ph- ơng trình** $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7}$

**H- ớng dẫn:**

Ta có $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow 7(x+y) = 3(x^2 - xy + y^2)$

Đặt $x + y = p$ , $x - y = q \Rightarrow p, q$ nguyên

$\Rightarrow x = \frac{p+q}{2}$; $y = \frac{p-q}{2}$ thay vào ph- ơng trình có dạng $28p = 3(q^2 + 3q^2) \Rightarrow p > 0$ và $p \vdots 3$ đặt $p = 3k$ $(k \in Z_0^+)$

$\Rightarrow 28k = 3(3k^2 + q^2) \Rightarrow k \vdots 3$ và k có dạng 3m $(m \in Z^+) \Rightarrow 28m = 27m^2 + q$

$\Rightarrow m(28 - 27m) = q^2 \ge 0$

$\Rightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$

Với $m = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow x = y = 0$ (loại)

Với $m = 1$ thì $k = 3$; $p = 9$

$\Rightarrow 28 = 27 + q^2 \Rightarrow q = \pm 1$

Khi $p = 9$, $q = 1$ thì $x = 5$, $y= 4$

khi $p = 9$, $q = 1-$ thì $x = 4$, $y= 5$

Vậy nghiệm của ph- ơng trình là (x, y) = (4, 5); (5, 4)

**<u>Bài 10:</u> Hãy dựng một tam giác vuông có số đo 3 cạnh là a, b, c là những số nguyên và có cạnh đo đ- ợc 7 đơn vị**

**H- ớng dẫn:**

Giả sử cạnh đo đ- ợc 7 đơn vị là cạnh huyền (a = 7)

$\Rightarrow b^2 + c^2 = 7^2 \Rightarrow b^2 + c^2 \vdots 7 \Rightarrow b \vdots 7; c \vdots 7$

(vì số chính ph- ơng chia hết cho 7 d- 0, 1, 4, 2)

lại có 0<b, c< 7 loại

$\Rightarrow$ Cạnh đo đ- ợc là cạnh góc vuông giả sử b = 7

Ta có $a^2 - c^2 = 49 \Leftrightarrow (a+c)(a-c) = 49$

$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 49 \\ a - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ c = 24 \end{cases}$ | Vậy tam giác cần dựng có số đo 3 cạnh là 7, 25, 24

## THỰC NGHIỆM S- PHẠM

# *Sử dụng tính chất nghiệm của ph□ơng trình bậc 2 để giải ph□ơng trình nghiệm nguyên.*

**I-Mục đích, yêu cầu:**

1) Thông qua việc giải các bài tập hệ thống và khắc sâu thêm các kiến thức cơ bản về ph- ơng trình bậc 2, nghiệm của ph- ơng trình bậc hai.
2) Củng cố kiến thức về số chính ph- ơng, phép chia hết, phép chia có d-
3) Phát huy trí lực của học sinh trong dạy toán

**II- Đồ dùng dạy học:**

Phiếu học tập, máy chiếu giấy trong hoặc bảng phụ

**III-Các hoạt động trong giờ:**

| Hoạt động của thầy | Hoạt động của trò |
|---|---|
| **Hoạt động 1: Kiểm tra bài cũ** | |
| Gi□o viằn nằu câu h□i kiợm tra:<br>**?1**. Vi□t cầng th□c nghi□m tắng qu□t c–a ph- □ng tr□nh bốc 2<br>$a x^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$? | Ba em h□c sinh lằn b□ng tr□nh bày.<br>**HS1**: Ph- □ng tr□nh $a x^2 + bx + c = 0$<br>$\Delta = b^2 - 4ac$<br>N□u $\Delta < 0$ ph- □ng tr□nh vầ nghi□m<br>N□u $\Delta = 0$ ph- □ng tr□nh c□1 nghi□m k□p $x = \frac{-b}{2a}$<br>N□u $\Delta > 0$ ph- □ng tr□nh c□2 nghi□m phân bi□t<br>$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| **?2**. S□p x□p ph- □ng tr□nh bốc hai sau theo □n x; theo □n y<br>$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$ | **HS2:**<br>- □□i v□i □n y:<br>$y^2 + (4x + 2)y + 3x^2 + 4x + 5 = 0$<br>- □□i v□i □n x:<br>$3x^2 + (4y + 4)x + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ |
| **?3**.Nằu h□qu□c–a □nh l□Viet vủ ph- □ng tr□nh bốc hai | **HS3:** N□u ph- □ng tr□nh $a x^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ c□hai nghi□m $x_1$ và $x_2$ th□<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ |
| Gi□o viằn nhốn x□t, □nh gi□. | Học sinh đối chiếu kết quả với bài của mình, nhận xét |

| Hoạt động 2: Các ví dụ | |
|---|---|
| Gi□o viằn □ãt vổn □ủ:<br>**Giải ph□ơng trình nghiệm nguyên**<br>**$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$ (1)**<br>**<u>Gợi ý:</u>**<br>- Vi□t ph- □ng tr□nh (1) thành ph- □ng tr□nh bốc 2 □n y r□i t□nh $\Delta'_x$ ? | H□c sinh nghe và ghi ch□p<br>HS: **Ví dụ 1**: Gi□i pt nghi□m nguyằn<br>$3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$ (1)<br>HS: $\Leftrightarrow y^2 + (4x + 2)y + 3x^2 + 4x + 5 = 0$<br>$\Delta'_x = x^2 - 4$ |
| - N□u pt bốc 2 c□nghi□m th□nghi□m □- □c t□nh bẳng cằng th□c nào? | $y_{1,2} = -(2x + 1) \pm \sqrt{\Delta'_x}$ (*) |
| - Do x, y nguyằn c□nhốn x□t g□$\sqrt{\Delta'_x}$ ? | Do x, y nguyằn $\sqrt{\Delta'_x}$ nguyằn $\Rightarrow$ $\Delta'_x$ là s□ch□nh ph- □ng . □ãt $\Delta'_x = k^2$<br>$\Rightarrow x^2 - 4 = k^2$<br>$\Leftrightarrow (x- k)(x+ k) = 4$ |
| - Vi□t s□4 d- □i d□ng t□ch hai s□nguyằn? | Ta c□4 = 1.4 = 2.2 = (-1).(-4) = (-2). (-2) |
| - Em c□nhốn x□t g□vủ x – k và x + k - Thay x và k vào (1) t□m y? | x – k; x + k c□ng ch□n $\Rightarrow$ x – k = x + k = $\pm$ 2<br>$\Rightarrow$ k = 0, x = $\pm$ 2 thay vào (1) t□m y .<br>Vốy nghi□m c–a ph- □ng tr□nh:(x, y) = (2, -5);(-2, 3) |
| *Em hỏ y th□c hi□n t- □ng t□v□i □n y? | **HS**: Ph- □ng tr□nh (1) t- □ng □- □ng v□i:<br>$3x^2 + ( 4y +4 )x + 3x^2 + 4x + 5 = 0$<br>$\Delta'_y = y^2 + 2y - 11$<br>Do x, y nguyằn $\sqrt{\Delta'_y}$ nguyằn $\Rightarrow$ $\Delta'_y$ là s□ch□nh ph- □ng . □ãt $\Delta'_y = k^2$ |
| □ỏ vốn d□ng ki□n th□c nào □ợ gi□i ph- □ng tr□nh □ỏ cho. Yằu c□u HS kiợm tra c□c b- □c gi□i | $\Rightarrow (y +1- k)( y + 1 + k) = 12$<br>Mà y +1- k và y + 1 +k cùng chẵn<br>12 = 2.6 = ( -2). (-6)<br>$\begin{cases} y+1-k=2 \\ y+1+k=6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y+1-k=-2 \\ y+1+k=-6 \end{cases}$<br>$\Rightarrow$ y = 3 hoặc y = - 5 . Thay vào (1)<br>Vốy nghi□m c–a ph- □ng tr□nh: (x, y)= (2, -5); (-2, 3) |
| Qua v□d□trằn em hỏ y nằu l□i ph- □ng ph□p gi□i?<br>( gi□o viằn □- a lằn màn h□nh t□m t□t theo 6 b- □c )<br>**B□ớc 1**: Vi□t ph- □ng tr□nh bốc hai theo □n x<br>**B□ớc 2**: T□nh $\Delta_y$ $\Rightarrow$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ | **HS:** H□c sinh suy ngh□,tr□l□i |

| | |
|---|---|
| **B□ớc 3**: □ặt $\Delta'_y$ = $k^2$<br>**B□ớc 4**: T□m y và k<br>**B□ớc 5**: Thay y và k vào ph- □ng tr□nh □ợ t□m x<br>**B□ớc 6**: Tr□l□i | |
| **Ví dụ 2:** Gi□i pt nghi□m nguyằn<br>$x^2 - (y + 5)x + 5y + 2 = 0$<br>-yằu c□u h□c sinh nằu l□i ph- □ng ph□p gi□i nh- v□d□1?<br>-Ngoài c□ch gi□i theo v□d□1 cĐn c□ch nào kh□c khầng?<br>-Gi□s□ph- □ng tr□nh c□hai nghi□m $x_1$ và $x_2$ theo □□nh l□Viet ta c□□iều g□?<br>- T□m biểu th□c liằn h□giệa $x_1$ và $x_2$<br>-Phân t□ch s□2 thành t□ch c–a hai s□ nguyằn.<br>-T□m $x_1$ và $x_2$ sau □□t□m tầng c–a ch□ng<br>-Tr□l□i bài to□n trằn<br>Hỏ y nằu l□i c□c b- □c làm<br>**B□ớc 1**: - Vi□t h□qu□□□nh l□Viet.<br>**B□ớc 2**: T□m biểu th□c liằn h□gệa $x_1$ và $x_2$<br>**B□ớc 3**: T□m $x_1$ và $x_2$ sau □□t□m y<br>**B□ớc 4:** Tr□l□i bài to□n | H□c sinh nghe và ghi ch□p<br>H□c sinh tr□l□i mi□ng<br>H□c sinh suy ngh□tr□l□i.<br>**HS:** G□i $x_1$ và $x_2$ là nghi□m c–a ph- □ng tr□nh<br>$x^2 - (y + 5)x + 5y + 2 = 0$<br>Theo □□nh l□Viet:<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 = y + 5 \\ x_1.x_2 = 5y + 2 \end{cases}$<br>Ta c□ $5x_1 + 5x_2 - x_1x_2 = 23$<br>hay $(x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2$<br>Nằn:<br>$\begin{cases} x_1 - 5 = 1 \\ x_2 - 5 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 - 5 = -1 \\ x_2 - 5 = -2 \end{cases}$<br>$\Rightarrow x_1 + x_2 = 13$ hoặc $x_1 + x_2 = 7 \Rightarrow y = 8$ hoặc $y = 2$<br>Vốy (x, y) = (7,8); (6,8); (4, 2); (3, 2) là nghi□m c–a ph- □ng tr□nh.<br>HS: H□c sinh tr□l□i mi□ng |
| **Hoạt động 3: Luyện tập** | |
| □□i v□i gi□i nghi□m nguyằn c–a ph- □ng tr□nh bốc 2 g□m nhệng ph- □ng ph□p nào?<br>Gi□o □- a □□ bài lằn màn h□nh:<br>**Bài 1:** T□m nghi□m nguyằn c–a ph- □ng tr□nh sau<br>$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$ (2) | **Ph□ơng pháp1**: Vốn d□ng cầng th□c nghi□m c–a ph- □ng tr□nh bốc 2<br>**Ph□ơng pháp2:** D□ng h□qu□c–a □□nh l□Viet<br>**Bài 1:** T□m nghi□m nguyằn c–a ph- □ng tr□nh sau<br>$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$ (2)<br>Gi□i: |

| | |
|---|---|
| G□i h□c sinh lần b□ng tr□nh bày<br><br>T□m nghi□m cu□ t□ng h□(I,II,III,IV) thay vào ph- □ng tr□nh (2) t□m x | T□nh $\Delta_y$ = $y^2$ – 24<br>$\Rightarrow$ $\Delta_y$ là s□ch□nh ph- □ng. □ặt $y^2$ – 24 = k<br>$\Rightarrow$ (y-k)(y+ k) = 24 l□i c□y – k; y + k c□ng t□nh ch□n lở<br>(I) $\begin{cases} y+k=6 \\ y-k=4 \end{cases}$ Ngi□m (x,y)= ( 8;5) ; (7;5)<br>(II) $\begin{cases} y+k=-6 \\ y-k=-4 \end{cases}$ Ngi□m (x,y)= ( -7;-5) ; (-8;-5)<br>(III) $\begin{cases} y+k=12 \\ y-k=2 \end{cases}$ Ngi□m (x,y)= ( 8;7) ; (13;7)<br>(IV) $\begin{cases} y+k=-12 \\ y-k=-2 \end{cases}$ Ngi□m (x,y)= ( -8;-7) ; (-13;-7)<br>Vốy ph- □ng tr□nh c□nghi□m (x,y)= ( 8;5) ; (7;5) ; ( -7;-5) (-8;-5);( 8;7) ; (13;7) ( -8;-7) ; (-13;-7) |
| **Hoạt động 4**: **Kiểm tra đánh giá** | |
| GV ph□t phi□u h□c tốp yầu c□u HS gi□i sau □□ GV thu phi□u nhốn x□t | **Bài 1:**T□m nghi□m nguyần c–a ph- □ng tr□nh<br>a, $x^2$ – 4x- $y^2$ = 1<br>b, $2x^2$ + $2y^2$ – 2xy + y + x = 10<br>**Bài 2**: T□m nghi□m nguyần c–a ph- □ng tr□nh :<br>$5x + 7y = 56$ |
| **Hoạt động 5:H□ớng dẫn về nhà**<br>Xem l□i v□ghi.<br>**1.Giải ph□ơng trình nghiệm nguyên sau:**<br>$x^2 + y^2 = x + y + 8$<br>**2. Tìm giá trị nguyên của m để 2 ph□ơng trình sau có ít nhất 1 nghiệm chung**<br>$2x^2 + (3m - 1)x – 3 = 0$ (1)<br>$6x^2 – (2m – 3) x – 1 = 0$ (2) | |

## D. KẾT QUẢ THỰC HIỆN.

### 1) Kết quả chung

Sau khi áp dụng đề tài vào giảng dạy đa số học sinh không những nắm vững cách giải ph- ơng trình nghiệm nguyên mà còn vận dụng linh hoạt trong các dạng toán khác.

### 2) kết quả cụ thể

Kiểm tra 10 học sinh lớp 9 theo các đợt khác nhau d- ới dạng phiếu học tậpthu đ- ợc kết quả sau:

Đề bài

**Bài 1:**T□m nghi□m nguyằn c–a ph- □ng tr□nh

a, $x^2 – 4x- y^2 = 1$

b, $2x^2 + 2y^2 – 2xy + y + x = 10$

**Bài 2**: T□m nghi□m nguyằn c–a ph- □ng tr□nh :

$5x + 7y = 56$

| D- ới điểm 5 | | Điểm 5 - 7 | | Điểm 8 - 10 | | Điểm 5 - 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SL | % | SL | % | SL | % | SL | % |
| 1 | 20 | 4 | 40 | 5 | 40 | 8 | 90 |

## C – KẾT LUẬN

Đề tài này đã nhận đ- ợc thử nghiệm qua nhiều năm bồi d- ỡng học sinh giỏi tôi thấy học sinh nắm đ- ợc bài và rất hứng thú học tập. Tôi nghĩ rằng tôi cần phải cố gắng đọc thêm tài liệu, học hỏi thầy cô và các bạn đồng nghiệp để tiếp tục xây dựng đề tài ngày càng phong phú hơn.

Ph- ơng pháp giải ph- ơng trình nghiệm nguyên là ph- ơng pháp đ- ợc ứng dụng rộng rãi trong nhiều bài toán dạng toán. Song vì thời gian eo hẹp nên đề tài này không thể tránh đ- ợc những sai sót.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO



| STT | Tài liệu | Tên tác giả |
|---|---|---|
| 1 | Chuyên đề bồi d- ỡng số học | Nguyễn Vũ Thanh |
| 2 | 400 bài toán số học chọn lọc | Vũ D- ơng Thuỵ<br>Tr- ơng Công Thành<br>Nguyễn Ngọc Đạm |
| 3 | Tìm hiểu ph- ơng trình đại số | Vũ Hoàng Lâm<br>Nguyễn Đễ |
| 4 | 351 bài toán số học chọn lọc | Nguyễn Đức Tấn<br>Đặng Anh Tuấn<br>Trần Chí Hiếu |
| 5 | Một số  tạp chí toán học | |

**Xác nhận của thủ trưởng đơn vị**

**Hà Nội, ngày 08/04/2012**

***Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.***

**Nguyễn Đức Minh**