Mục lục

Các ứng dụng của định lý vi-ét

Phần I: Cơ sở xuất phát

1. **Đặt vấn đề**
2. **Mục đích và nhiệm vụ của đề tài.**

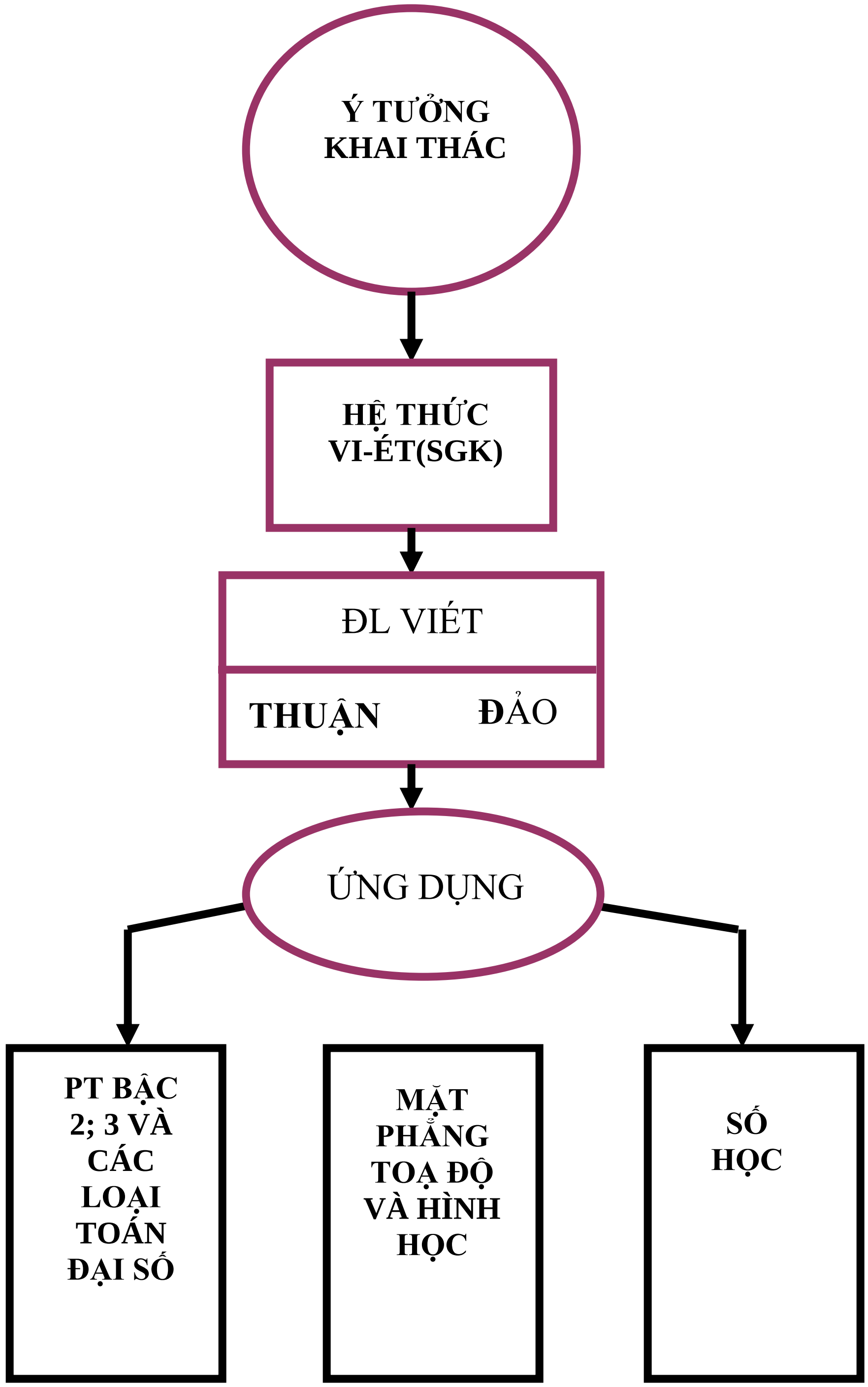
Phần II: Nội dung - phương pháp.

1. **Lý thuyết (Kiến cơ bản và mở rộng)**
2. **Các ứng dụng của định lý viét**
   * **Các ứng dụng cơ bản.**
   * **Các ứng dụng khác.**

Phần III: Các biện pháp thực hiện

Phần IV: Kết quả - bài học kinh nghiệm

Phần V: Kết luận


Ý TƯỞNG KHAI THÁC
HỆ THỨC VI-ÉT(SGK)
ĐL VIÉT
THUẬN
ĐẢO
ỨNG DỤNG
PT BẬC 2; 3 VÀ CÁC LOẠI TOÁN ĐẠI SỐ
MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ VÀ HÌNH HỌC
SỐ HỌC

PHẦN I: CƠ SỞ XUẤT PHÁT

1. Đặt vấn đề

Trong việc dạy học toán, việc giải toán có tầm quan trọng lớn và đã từ lâu là một trong những vấn đề trung tâm của phương pháp dạy học toán. Đối với học sinh ở bậc trung học cơ sở có thể coi việc giải toán là một hình thức chủ yếu của việc học toán.

Việc giải toán có nhiều ý nghĩa:

- Đó là hình thức tốt nhất để củng cố, đào sâu, hệ thống hoá kiến thức và rèn luyện kĩ năng kĩ xảo. Trong nhiều trường hợp giải toán là một hình thức tốt để dẫn dắt học sinh tự mình đi đến kiến thức mới.

- Đó là hình thức vận dụng kiến thức đã học vào các vấn đề cụ thể, thực tế và các vấn đề mới.

- Là hình thức tốt nhất để giáo viên kiểm tra học sinh và học sinh tự kiểm tra mình về năng lực, mức độ tiếp thu và vận dụng kiến thức đã học.

- Việc giải toán có tác dụng lớn gây hứng thú học tập cho học sinh phát triển trí tuệ và giáo dục, rèn luyện người học sinh về nhiều mặt.

1. Định lý toán học là mệnh đề đúng. Vì thế nó là kiến thức cơ bản có giá trị về phương diện suy luận và ứng dụng trong chương trình toán nói chung cũng như chương trình toán THCS nói riêng.

2. Trong môn Đại số lớp 9 ở THCS có một định lý đã nói rõ mối quan hệ giữa các nghiệm số của một phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với các hệ số của nó. Đó là định lý do nhà toán học nổi tiếng người Pháp Prăng xoa Vi-ét (F. Viete) (1540- 1603) tìm ra được mang tên ông: Định lý Vi-ét.

Do đặc thù đặc biệt của định lý (gồm định lý thuận và đảo) nên nó có giá trị đặc biệt là nêu lên được nhiều ứng dụng quan trọng trong các bài toán liên quan đến phương trình bậc hai như:

- Tìm tổng và tích các nghiệm của một phương trình bậc hai khi có nghiệm.
- Biết một nghiệm của phương trình bậc hai suy ra nghiệm kia.
- Nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai (khi có nghiệm) trong các trường hợp.
- Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.
- Lập một phương trình bậc hai một ẩn biết hai nghiệm cho trước…

Vì thế định lý Vi-ét và các ứng dụng của nó có vai trò "một chìa khoá" quan trọng mở ra hướng giải quyết cho nhiều bài toán có liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai, ba một cách phong phú, đa dạng như: Chứng minh bất đẳng thức; tìm cực trị; quan hệ giữa đường thẳng và parabol trong mặt phẳng Đề các; tính giá trị các biểu thức bậc cao của các nghiệm số…

3. Việc dạy định lý Vi-ét và nêu ra các ứng dụng của nó trong chương trình đại 9 có ý nghĩa đặc biệt ở chỗ là: làm cho HS hiểu sâu sắc hơn về các nghiệm số của một phương trình bậc 2; nêu được quan hệ định tính, định lượng của các nghiệm số với các hệ số của phương trình bậc 2. Có thể nói: "Các nghiệm số của phương trình bậc 2 dưới lăng kính của định lý Vi-ét đã ánh lên các sắc màu rực rỡ".

4. Những ứng dụng phong phú của định lý Vi-ét đã góp phần làm giàu,(đa dạng, phong phú) các dạng bài tập về phương trình bậc 2 (phương trình qui về bậc hai); các bài toán có liên quan đến nghiệm số của phương trình bậc 2; những kỹ thuật giải phương trình; hệ phương trình độc đáo nhờ hệ thức Vi-ét.

5. Việc vận dụng hệ thức Vi-ét vào giải toán đã gây được hứng thú giải bài tập cho HS, hình thành cho HS những ý tưởng phong phú, trau dồi tư duy và óc sáng tạo cho các em khi giải các bài toán có liên quanđến phương trình bậc hai.

6. Phương trình bậc hai và định lý Vi-ét thông qua hệ thức giữa các nghiệm số được gắn kết với nhau như hình với bóng để tạo ra những bài toán, những ứng dụng phong phú và đa dạng từ Đại số, Số học, Hình học hấp dẫn kì lạ.

7. Những ứng dụng cơ bản và phong phú của định lý Vi-ét thuận, đảo đã làm giàu tư duy, kĩ năng giải toán cho HS cuối cấp. Giúp các em nhìn nhận các bài toán trong mối liên hệ sinh động dưới "con mắt động" của sự ràng buộc giữa biến số và tham số; giữa hằng và biến, phần nào giúp HS nâng cao chất lượng học tập môn toán.

8. Việc khai thác định lý Vi-ét thuận, đảo và các ứng dụng phong phú của nó trong Đại số, Hình học, Số học có tính tất yếu tuân theo quy luật biện chứng của bất kì một môn khoa học nào, đồng thời hình thành cho người dạy, người học một phong cách nghiên cứu toán học ở một phạm vi nhất định tạo điều kiện đổi mới phương pháp dạy học một cách hiệu quả.

9. Thực tế việc khai thác định lý Vi-ét và các ứng dụng của nó, của người dạy và người học phần nào còn nhiều sơ sài như chưa khai thác triệt để định lý đảo; các kết quả từ định lý Vi-ét, đặc biệt khai thác các ứng dụng phong phú vào các thể loại bài tập còn hạn chế. Với lý do trên nên tôi đề xuất một vấn đề: "***Nghiên cứu khai thác định lý Vi-ét và các ứng dụng phong phú của nó trên nhiều phương tiện Đại số, Hình học, Số học."***

2. Mục đích và nhiệm vụ của đề tài.

2.1. Mục đích:

Mục đích của sáng kiến nhằm rèn luyện kỹ năng cho học sinh lớp 9 cách khai thác các ứng dụng của định lí Vi- et trong giải toán nhằm nâng cao chất lượng học cho học sinh khắc phục những vướng mắc trong quá trình tìm tòi tìm phương pháp giải bài tập một cách hợp lí. Thông qua đó giúp học sinh biết khai thác bài toán nhằm phát triển tư duy cho học sinh cao hơn nữa góp phần rèn tính tích cực, tự giác, chủ động, độc lập qua từng bài giảng. Rèn kỹ năng vận dụng quy tắc suy luận, vận dụng khái niệm, tính chất, kỹ năng sử dụng chính xác ngôn ngữ toán học tìm hiểu bài toán phân tích bài toán và đường lối giải toán.

2.2. Nhiệm vụ

Rèn cho học sinh các năng lực về hoạt động trí tuệ để có cơ sở tiếp thu các môn khoa học khác ở trường cấp II, mở rộng khả năng áp dụng kiến thức vào thực tế. Rèn cho học sinh có kỹ năng, kỹ xảo và thói quen giải bài tập giúp học sinh xác định đựơc với bài toán này ta sử dụng phương pháp nào để giải bài toán? Kiến thức nào áp dụng để giải bài toán này, có bao nhiêu cách giải và cách nào hay hơn cả, từ đó khi gặp những bài toán khó học sinh tư duy tìm cách tháo gỡ nhẹ nhàng hơn, mạch lạc hơn và hiệu quả hơn.

2.3. Phương pháp nghiên cứu:

Trong quá trình viết sáng kiến kinh nghiệm này tôi sử dụng phương pháp lí luận qua đọc sách giáo khoa, sách hướng dẫn giảng dạy, sách tham khảo, các tạp chí toán học liên quan đến đề tài. Bên cạnh đó tôi còn sử dụng các phương pháp khác như: Phương pháp phân tích, tổng hợp so sánh, tổng kết kinh nghiệm từ thực tế giảng dạy của bản thân, từ đồng nghiệp, đặc biệt từ chuyên đề “Hệ thức Vi – ét và một số bài toán liên quan” của nhóm toán 9 ở trường tôi để thấy được tác dụng của đề tài mà tôi nghiên cứu.

2.4. Đối tượng nghiên cứu:

- Đối tượng nghiên cứu là học sinh lớp 9 trường Trung học cơ sở Thái Thái Thịnh - Đống Đa – Hà Nội.
- Các em thuộc lứa tuổi 15 đến 16. Là lứa tuổi hiếu động thích làm người lớn, thích thể hiện theo phong cách của người lớn, thích khẳng định mình song lại thiếu sự chín chắn, đôi khi hay hấp tấp, thiếu tính cẩn thận. Tư duy khái quát hoá và tổng hợp hoá chưa cao nên việc phân tích đầu bài toán còn hạn chế, thiếu tính lô gíc chặt chẽ. Vì vậy, với học sinh đại trà khi gặp bài toán nâng cao học sinh thường hay lúng túng nên đôi lúc không tìm được lời giải bài toán. Là người đứng trên bục giảng giáo viên phải nắm được đặc điểm này của học sinh. Thông qua bộ môn cụ thể là phân môn Đại số, tôi giúp học sinh có khả năng khai thác bài toán nhằm phát huy trí thông minh, năng động, phù hợp với khả năng của học sinh khi giải toán. Từ đó giúp các em học các môn học khác tốt hơn.

PHẦN II: NỘI DUNG – PHƯƠNG PHÁP

1. LÝ THUYẾT

1. 1. Định lý Viet thuận:

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1 \,.\, x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad \left[(a \neq 0 \text{ và } \Delta \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \right]$$

* Hệ quả: PT bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$ (*)

- Nếu $a + b + c = 0$ thì (*) có 1 nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{c}{a}$

- Nếu $a - b + c = 0$ thì (*) có 1 nghiệm là $x_1 = - 1$; nghiệm kia là $x_2 = \dfrac{-c}{a}$

1.2. Định lý đảo:

Nếu có 2 số x_1, x_2 thoả mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 . x_2 = P \end{cases}$ thì chúng là nghiệm số của phương trình:

$t^2 - st + p = 0$ (Điều kiện $\exists$ 2 số x_1, x_2 là $s^2 - 4p \geq 0$)

Chú ý:

* Trước khi áp dụng hệ thức Vi- et cần tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \, (\Delta' \geq 0) \end{cases}$$

* $a + b + c = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $a - b + c = 0 \Leftrightarrow x = - 1$

* Nếu có: $x = \alpha$; $y = \beta$ là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ thì α, β là nghiệm phương trình: $t^2 - st + p = 0$

1.3. Các ứng dụng cơ bản (thường dùng):

a. Kiểm tra nghiệm phương trình bậc 2.

b. Tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc 2.

c. Biết 1 nghiệm suy ra nghiệm kia

d. Tìm 2 số biết tổng và tích.

e. Lập 1 phương trình bậc 2 biết 2 nghiệm

1.4. Một số kết quả thu được từ định lý Viet:

a. Phân tích $ax^2 + bx + c = 0$ (*) $(a \neq 0)$ thành nhân tử:

Khi (*) có $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \,/\, x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$; $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$ thì

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]$$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

b. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất:

* Từ: $S = x_1 + x_2$; $P = x_1 . x_2$

- Nếu $S = x_1 + x_2$ (không đổi) còn $P = x_1 . x_2$ thay đổi.

Do $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq \dfrac{S^2}{4}$

$P = \dfrac{S^2}{4} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{S}{2}$

$\Rightarrow \max P = \dfrac{S^2}{4} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{S}{2}$ (Vì $x^2 - Sx + P = 0$ có nghiệm kép)

$\Rightarrow$ KL: Hai số có tổng không đổi tích lớn nhất $\Leftrightarrow$ 2 số bằng nhau.

- Nếu $x_1 > 0$; $x_2 > 0$ và $x_1 x_2 = P$ (Không đổi)

Còn $S = x_1 + x_2$ (thay đổi)

Do: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow \left(S - 2\sqrt{P}\right)\left(S + 2\sqrt{P}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow S - 2\sqrt{P} \geq 0$; $S = 2\sqrt{P} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{P}$

$\Rightarrow$ KL: 2 số dương có tính không đổi tổng nhỏ nhất khi chúng bằng nhau.

c. Xét dấu các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$)

$$\left(S = \frac{-b}{a}; P = \frac{c}{a}\right)$$

- Điều kiện cho (*) có 2 nghiệm trái dấu là $P < 0$

- Điều kiện cho (*) có 2 nghiệm cùng dấu là $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

- Điều kiện để (*) có 2 nghiệm cùng dương là: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

- Điều kiện để (*) có 2 nghiệm cùng âm là: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

- Điều kiện để (*) có 1 nghiệm kép dương là: $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

- Điều kiện để (*) có 1 nghiệm kép âm là: $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S < 0 \end{cases}$

d. Điều kiện của tham số để hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = f_{(m)} \\ x.y = g_{(m)} \end{cases}$ ***có 1 nghiệm duy nhất là:***

$f^2_{(m)} - 4g_{(m)} = 0$

(Chính là điều kiện để phương trình bậc 2 $t^2 - f_{(m)}t + g_{(m)}) = 0$ có nghiệm kép)

2. CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI – ÉT

2.1.Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

1. Phương pháp: Dựa vào định lý đảo của định lý Viet:

Nếu 2 số u và v có $\begin{cases} u+v=S \\ u.v=P \end{cases}$ thì u và v là nghiệm của phương trình:

t^2 - St + P = 0 (1)

Như vậy việc tìm 2 số quy về việc giải 1 phương trình *(Tìm nghiệm của phương trình đó $\Rightarrow$ 2 số cần tìm).*

Chú ý: Nếu $S^2 - 4P \geq 0$ thì tồn tại 2 số.

Nếu $S - 4P < 0$ không tồn tại 2 số.

2. Ví dụ:

a. Tìm 2 cạnh 1 hình chữ nhật có chu vi là 6a; Diện tích là $2a^2$.

* Gọi 2 cạnh hình chữ nhật là u và v (u > 0; v > 0).

Ta có: $\begin{cases} 2u+2v=6a \\ uv=2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3a \\ vu=2a^2 \end{cases}$

Do $(3a)^2 - 4 . 2a^2 = a^2 > 0$ nên u, v là nghiệm của phương trình bậc 2.

$t^2 - 3at + 2a^2 = 0$ giải được $t_1 = a$; $t_2 = 2a$

Vậy độ dài 2 cạnh hình chữ nhật là a và 2a.

b. Tìm phương trình bậc 2 nhận x_1; x=2 là nghiệm và $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=13 \\ x_1x_2=6 \end{cases}$ (*)

Biến đổi hệ (*) ta có: $\begin{cases} (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13 \\ x_1x_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=5 \\ x_1+x_2=-5 \end{array}\right. \\ x_1x_2=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1.x_2=6 \end{cases} & \Rightarrow x_1, x_2 \text{ là nghiệm phương trình: } x^2-5x+6=0 \\ \begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1.x_2=6 \end{cases} & \Rightarrow x_1, x_2 \text{ là nghiệm phương trình: } x^2+5x+6=0 \end{array}\right.$

c. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 & (1) \\ xy=27 & (2) \end{cases}$

(Ta quy về tìm x, y / $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = P \end{cases}$)

Từ (1) có $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \Leftrightarrow x + y + 3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) = 64 \Leftrightarrow x + y = 28$

Vậy hệ (1) (2) có dạng $\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$ do 28^2 - 4 . 27 > 0 nên x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 28t + 27 = 0$. Giải được $t_1 = 1$; $t_2 = 27$. Hệ có 2 nghiệm:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 27 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 27 \\ y = 1 \end{cases}$

d. Giải phương trình: $x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right).\left(x + \dfrac{5-x}{x+1}\right) = 6$ (Đ/K: $x \neq -1$)

Đặt: $u = x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)$; $v = \left(x + \dfrac{5-x}{x+1}\right) = 6$ (Đ/K: $x \neq -1$)

u + v = 5 (2) Từ (1) và (2) ta quy về tìm u, v sao cho: $\begin{cases} u + v = 5 \\ u.v = 6 \end{cases}$

Do 25 - 24 > 0. Nên u, v là nghiệm phương trình $t^2 - 5t + 6 = 0$

→ $t_1 = 3$; $t_2 = 2$.

Từ đó có: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ v_1 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = 3 \end{cases}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{array}\right. \\ x \neq -1 \end{cases}$ giải được $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ (TM)

e. Cho phương trình: $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm là x và d;

phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có 2 nghiệm là a và b.

Tính a, b, c, d biết rằng chúng đều $\neq 0$.

<u>Giải:</u> áp dụng định lý Viet vào 2 phương trình đã cho có:

c + d = - a (1) c . d = b (2)

$a + b = - c$ (3) $a . b = d$ (4)

Từ $\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow a + c = - d \\ (3) \Rightarrow a + c = - b\end{array}\right\} \Rightarrow b = d$

Từ (2) $\Rightarrow c = 1$ (Vì $b = d \neq 0$)

Từ (4) $\Rightarrow a = 1$ (Chia 2 vế cho $b = d \neq 0$)

Thay $a = c = 1$ vào (1) $\Rightarrow d = - 2 \Rightarrow b = - 2$

Vậy (a, b, c, d) = (1; - 2; 1; - 2)

2.2. Tính giá trị các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

1. Biểu thức đối xứng của 2 nghiệm

Biểu thức $f(x_1, x_2)$ gọi là đối xứng với x_1, x_2 nếu:

$f(x_1 , x_2) = f(x_2, x_1)$

(Nếu đổi chỗ (vị trí) x_1 và x_2 thì biểu thức không thay đổi).

- Nếu $f(x_1, x_2)$ đối xứng thì $f(x_1, x_2)$ luôn có thể biểu diễn qua 2 biểu thức đối xứng là $S = x_1 + x_2$; $P = x_1 . x_2$.

- Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc 2 $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi hán vị x_1 và x_2.

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 theo S và P. Ví dụ:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$$

. . .

2. Các ví dụ:

a. Bài toán 1: Cho phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$)

Có 2 nghiệm là x_1, x_2. Chứng minh rằng: Với $S_n = x_1^n + x_2^n$

Thì $a . S_{n+2} + b . S_{n+1} + c . S_n = 0$

Giải:

Do x_1, x_2 là nghiệm (*) $\Rightarrow \begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax_1^n.x_1^2 + bx_1^n.x_1 + cx_1^n = 0 \\ ax_2^n.x_2^2 + bx_2^n.x_2 + cx_2^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0 \\ ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a.\left(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}\right) + b\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right) + c\left(x_1^n + x_2^n\right) = 0$$

hay: $a . S_{n+2} + b . S_{n+1} + c . S_n = 0$

b. Bài toán 2: Cho phương trình $x^2 + 5x + 2 = 0$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm. Hãy tính giá trị các biểu thức:

$x_1^2 + x_2^2$; $x_1^3 + x_2^3$; $x_1^4 + x_2^4$; . . . ; $x_1^7 + x_2^7$; $x_1^2x_2^3 + x_1^3x_2^2$; $|x_1 - x_2|$

Giải: Trước hết kiểm tra phương trình đã cho nghiệm hay không.

$\Delta = 25 - 8 = 17 > 0 \Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$

Suy ra:

- $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 21$
- $x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P) = -95$
- $x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 441 - 8 = 433$
- $x_1^7 + x_2^7 = \left(x_1^3 + x_2^3\right)\left(x_1^4 + x_2^4\right) - x_1^3.x_2^3\left(x_1 + x_2\right)$

  $= - 95 . 433 - 8 . (- 5) =$
- $x_1^2x_2^3 + x_1^3x_2^2 = x_1^2x_2^2\left(x_1 + x_2\right) = P^2.S = -20$
- $|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{17}$

*** Chú ý:** Ta có thể mở rộng cho bài toán trên yêu cầu tính giá trị của $x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = S_{n+2}$; S_{n+1} ; S_n bằng cách áp dụng kết quả Bài toán 1.

$\Rightarrow S_{n+2} = - b\,S_{n+1} - cS_n$

Ví dụ: Cho x_1, x_2 là nghiệm phương trình: $x^2 - 2x - 2 = 0$ Tính $x_1^7 + x_2^7$

Ta có: $\Delta' = 3 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2.

$S_1 = 2 \Rightarrow S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_2 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 8$

$S_3 = - bS_2 - cS_1 = 16 + 4 = 20$

$S_4 = - bS_3 - cS_2 = \quad\quad = 56$

$S_5 = - bS_4 - cS_3 = 152 =$

$S_6 = - bS_5 - cS_4 = 416$

$S_7 = - bS_6 - cS_5 =1136$

c. Bài toán 3: (Học sinh giỏi).

Gọi a, b là nghiệm phương trình: $30x^2 - 3x = 2002$.

Rút gọn (Tính) $M = \dfrac{30\left(a^{2002} + b^{2002}\right) - 3\left(a^{2001} + b^{2001}\right)}{a^{2000} + b^{2000}}$

* Nhận thấy phương trình đã cho: $30x^2 - 3x - 2002 = 0$ có $\Delta > 0$

$\Rightarrow x_1 = a$; $x_2 = b \Rightarrow S_n = a^n + b^n$

áp dụng công thức thuộc Bài toán 1: $A . S_{n+1} + B . S_{n+1} + C. S_n = 0$

Theo đầu bài ta có: $S_n = a^{2000} + b^{2000}$

$S_{n+1} = a^{2001} + b^{2001}$

$S_{n+2} = a^{2002} + b^{2002}$

$\Rightarrow 30\,S_{n+2} - 3S_{n+1} - 2002S_n = 0$

$\Rightarrow 30\,S_{n+2} - 3S_{n+1} = 2002S_n$

$\Rightarrow M = \dfrac{2000S_n}{S_n} = 2002$

d. Bài toán 4: Cho phương trình x^2 - ax + a - 1 = 0 có 2 nghiệm là x_1 và x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $M = \dfrac{3x_1^2 + 3x_2^2 - 3}{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2}$.

Giải: Trước hết kiểm tra xem phương trình đã cho có nghiệm không ?

Ta có: $\Delta = a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2 \geq 0$

Nên phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x_1 và x_2.

áp dụng hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = a$; $x_1.x_2 = a - 1$.

$$M = \frac{3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 - 3}{x_1x_2(x_1 + x_2)} = \frac{3a^2 - 6(a-1) - 3}{a(a-10} = \frac{3a^2 - 6a + 3}{a^2 - a} (a \neq 0; a \neq 1)$$

e. Bài 5: Cho a ≠ 0; Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - ax - \dfrac{1}{a^2} = 0$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = x_1^4 + x_2^4$

Ta có: $x_1 + x_2 = a$; $x_1.x_2 = \dfrac{-1}{a^2} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P$

$$E = a^4 + \frac{2}{a^4} + 4 \geq 2\sqrt{2} + 4$$

$$E = 2\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow a^8 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[8]{2}$$

$$\Rightarrow \text{Min } E = 4 + 2\sqrt{2} \text{ tại } a = \pm\sqrt[8]{2}$$

*** Chú ý:** Nếu biến đổi phương trình đã cho thành phương trình $a^2x^2 - a^3x - 1 = 0$ (a ≠ 0) thì việc xét xem phương trình có nghiệm hay không và tìm GTNN $E = x_1^4 + x_2^4$ tiện lợi hơn.

2.3. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số:

1. Phương pháp:

Để tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số trong 1 phương trình bậc 2 *(Giả sử tham số là m)* ta có thể thực hiện theo các bước sau:

- Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

- áp dụng hệ thức Viet ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = f_{(m)} \\ x_1.x_2 = g_{(m)} \end{cases}$ (*)

- Khi m từ hệ (*) ta được hệ thức cần tìm *(Sử dụng phép thế hoặc cộng)*.

2. Ví dụ:

a. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2(m - 4)x + m - 5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộcm *(Độc lập với m)*.

<u>Giải:</u> Trước hết tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ (m-4)^2 - (m-1)(m-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}$$

Khi đó theo Viet phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-5}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = \dfrac{4(m-4)}{m-1} \\ 3x_1.x_2 = \dfrac{3(m-5)}{m-1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$ *(Không chứa m)*.

Đó chính là hệ thức cần tìm.

b. Cho phương trình: $(m^2 + 1)x^2 - 2mx + 1 - m^2 = 0$.

* CMR với mọi $m > 1$ phương trình luôn có nghiệm.

* Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số m.

<u>Giải:</u>

* Ta có: $a = m^2 + 1 > 0$ ($m^2 \geq 0$) nên phương trình đã cho là1 phương trình bậc 2 ẩn x tham số m.

Mặt khác, $C = 1 - m^2 < 0$ (Vì $m > 1 \Rightarrow m^2 > 1$).

Như vậy: a và c trái dấu $\Rightarrow$ ac < 0 $\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m > 1.

* áp dụng hệ thức Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{1-m^2}{m^2+1} \end{cases}$ (*)

- Khử m từ hệ (*) bằng nhận xét:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1.x_2)^2 = \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2$$

$$= \frac{4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1}{(m^2+1)^2} = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} = 1$$

Vậy ta có hệ thức cần tìm là: $(x_1 + x_2)^2 + (x_1.x_2)^2 = 1$

2.4. Tìm điều kiện của tham số để 2 nghiệm liên hệ với nhau bởi 1 hệ thức cho trước *(điều kiện cho trước)*

1. Phương pháp

Có thể thực hiện các bước

* Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2.

* Bước 2: áp dụng hệ thức Viet, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f_{(m)} \\ x_1.x_2 = g_{(m)} \end{cases} \quad (*)$$

* Bước 3: Kết hợp (*) với điều kiện *(Hệ thức cho trước)* suy ra phương trình có ẩn là tham số từ đó tìm được tham số.

(Chú ý cần đối chiếu tham số cần tìm được với điều kiện để phương trình đầu có nghiệm số).

2. Các ví dụ:

a. Tìm m để phương trình: $3x^2 + 4(m - 1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1. x_2 thoả mãn: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

<u>Giải:</u>

* Trước hết phương trình phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, $x_{21} \neq 0$ nên phải có: $\Delta' > 0$.

$\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 - 3(m^2 - 4m + 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 > 0.$

$\Leftrightarrow m < -2 - \sqrt{3}$ hoặc $m > -2 + \sqrt{3}$ (*)

* Theo hệ thức Viet ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{4(1-m)}{3}\ ;\ x_1.x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}$$

$(m^2 - 4m + 1 \neq 0) \Leftrightarrow m \neq 2 \pm \sqrt{3}$ (**)

Từ hệ thức của x_1, x_2 ta có:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (1) hoặc $\frac{1}{x_1x_2} - \frac{1}{2} = 0$ (2)

- Từ (1) có: $\frac{4}{3}(1 - m) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

- Từ (2) có: $\frac{3}{m^2 - 4m + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 5 \end{array}\right.$$

* Kết hợp các giá trị của m với điều kiện: (*) (**) ta được m = 1 ; m = 5.

Như vậy: Với m = 1 hoặc m = 5 thì phương trình đã cho thoả mãn đầu bài

(Chú ý: Có thể tìm m từ hệ hỗn hợp sau:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{4(1-m)}{3} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m^2 - 4m + 1}{3} \neq 0 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Khi có: $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ nếu chia cho $x_1 + x_2$ sẽ làm mấy nghiệm)

b. Cho phương trình: $x^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm x_1, x_2; phương trình:

$x^2 - b^2x + bc = 0$ có các nghiệm x_3, x_4. Biết $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Tìm b và c.

Giải:

* Trước hết phải có: $\begin{cases} b^2 - 4c \geq 0 \\ b^4 - 4bc \geq 0 \end{cases}$ (*)

* Theo giả thiết và theo hệ thức Viet có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1.x_2 = c \\ x_3 + x_4 = b^2 \\ x_3.x_4 = bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -b & (1) \\ x_1.x_2 = c & (2) \\ (1 + x_1) + (1 + x_2) = b^2 & (3) \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) = bc & (4) \end{cases}$$

(Vì $x_3 = x_1 + 1$; $x_4 = x_2 + 1$)

Từ (1) và (3) có: $b_2 + b - 2 = 0 \Leftrightarrow (b - 1)(b + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -2 \end{array}\right.$

Từ (4) có: $x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = bc \quad \Leftrightarrow c - b + 1 = bc$ (5)

- Với b = 1 thì (5) đúng khi đó phương trình: $x^2 + bx + c = 0$

trở thành $x^2 + x + c = 0$

Có nghiệm nếu $\Delta = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \dfrac{1}{4}$

Phương trình: $x^2 - b^2x + bc = 0$ trở thành $x^2 - x + c = 0$ cũng có nghiệm nếu $c \le \frac{1}{4}$:

- Với b =- 2 (5) trở thành $c + 3 = - 2c \Rightarrow c = - 1$

Khi đó phương trình: $x^2 - b^2x + bc = 0$ trở thành $x^2 - 4x + 2 = 0$ có nghiệm là $2 \pm \sqrt{2}$.

Phương trình: $x^2 + bx + c = 0$ trở thành $x^2 - 2x - 1 = 0$ có nghiệm là $1 \pm \sqrt{2}$

* Kết luận: ($b = 1$; $c \le \frac{1}{4}$) hoặc ($b = - 2$; $c = - 1$)

(Vì các giá trị này thoả mãn điều kiện (*))

c. Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 2) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1. x_2 thoả mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

<u>Giải:</u> Có thể giải hệ hỗn hợp sau để tìm m:

$$\begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \quad x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0; \text{và} 2m^2 - 4m - 1 < 0 \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1 = 1 - \dfrac{2(2-m)}{m} \end{cases} \quad \left(\dfrac{2-m}{m}\right).\left(1 - \dfrac{2(2-m)}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0; \text{và} \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \\ \dfrac{(2-m)(6m-4)}{m^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = \dfrac{2}{3}$$

d. Tìm các số p và q của phương trình: $x^2 + px + q = 0$ sao cho các nghiệm của nó thoả mãn: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$

<u>Giải:</u> * Trước hết phải có điều kiện: $\Delta > 0 \Leftrightarrow p^2 - 4q > 0$

Giải hệ sau: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p & (1) \\ x_1.x_2 = q & (2) \\ x_1 - x_2 = 5 & (3) \end{cases}$

$x_1^3 - x_2^3 = 35 \qquad (4)$

Từ (3) có: $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q = 25 \qquad (5)$

Từ (4) có: $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 5\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right] = 35$

$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = p^2 - q = 7 \qquad (6)$

Kết hợp (5) và (6) ta có: $\begin{cases} p^2 - 4q = 25 \\ p^2 - q = 7 \end{cases}$ (*)

Giải được $q = -6$; $p_{1,2} = \pm 1$

Nghiệm của hệ (*) là: $\begin{cases} p = 1 \\ q = -6 \end{cases}$; $\begin{cases} p = -1 \\ q = -6 \end{cases}$ thoả mãn điều kiện: $p^2 - 4q > 0$

Kết luận: $\begin{cases} p = 1 \\ q = -6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} p = -1 \\ q = -6 \end{cases}$

e. Xác định tham số m sao cho phương trình:

(1) $2x^2 - 3(m + 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu

(2) $mx^2 - 2(m - 2)x + 3(m - 2) = 0$ có 2 nghiệm cùng dấu

Giải:

(1) Có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 2) < 0$

$\Leftrightarrow -1 < m < 2$

(2) Giải $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \dfrac{3(m-2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$

2.5. Thiết lập phương trình bậc 2:

* Ta thiết lập 1 phương trình bậc 2 nhận các số x_1; x_2 là các nghiệm dựa trên cơ sở (Định lý Viet).

Nếu $x_1 + x_2 = S$; $x_1.x_2 = p$ thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$x^2 - Sx + P = 0$ ($S^2 - 4P \geq 0$)

*** Các ví dụ:**

1. Gọi α, β là các nghiệm của phương trình: $3x^2 + 7x + 4 = 0$ không phải phương trình hãy thành lập phương trình bậc 2 với hệ số bằng số mà các nghiệm của nó là: $\frac{\alpha}{\beta-1}$ và $\frac{\beta}{\alpha-1}$.

* Giải: Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} \alpha+\beta = \frac{-7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{4}{3} \end{cases}$ với $\alpha \neq 1$ và $\beta \neq 1$.

Ta có: $\frac{\alpha}{\beta-1} + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha-\beta}{(\alpha-1)(\beta-1)} = \frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)-2\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1} = \frac{23}{21}$

$\frac{\alpha}{\beta-1}.\frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1} = \frac{6}{21}$

Vậy $\frac{\alpha}{\beta-1}$ và $\frac{\beta}{\alpha-1}$ là nghiệm của phương trình $X^2 - \frac{23}{21}X + \frac{6}{21} = 0$

Hay phương trình: $21X^2 - 23X + 6 = 0$

<u>* Chú ý:</u> Có thể giải bài toán trên bằng cách lập phương trình tích rồi đưa về phương trình bậc 2 cần tìm.

$$\left(X - \frac{\alpha}{\beta-1}\right)\left(X - \frac{\beta}{\alpha-1}\right) = 0$$

2. Cho a là số thực sao cho $a + 1 \neq 0$. Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm x_1; x_2 thoả mãn các hệ thức:

$4x_1x_2 + 4 = 5(x_1 + x_2)$ (1)

$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{a+1}$ (2)

Giải: * Để lập được 1 phương trình bậc 2 có 2 nghiệm x_1 ; x_2 ta phải tìm được $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$ theo a.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x_1.x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \frac{1}{a+1}$

$\Leftrightarrow x_1.x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{-a}{a+1}$ (3)

(1) $\Leftrightarrow 4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = -4$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4}{a+1} \\ x_1.x_2 = \frac{4-a}{a+1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$x^2 - \left(\frac{4}{a+1}\right)x + \frac{4-a}{a+1} = 0$ hay $(a + 1)x^2 - 4x + 4 - a = 0$.

3. Viết phương trình bậc 2 có nghiệm x_1; x_2 thoả mãn: $\begin{cases} 2x_1x_2 - 3(x_1.x_2) = 2 & (1) \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) = k + 5 & (2) \end{cases}$

* Ta cần tìm được $x_1 + x_2$ và $x_1 .x_2$ theo k.

Đặt $x_1 + x_2 = S$; $x_1.x_2 = P$, ta có:

$\begin{cases} 2P - 3S = 2 \\ P - 2S = k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2k \\ P = -3k + 1 \end{cases}$

Phương trình cần tìm là $x^2 + 2kx - 3k + 1 = 0$ (

ĐK: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 1 \geq 0$)

* Qua các ví dụ trên ta đã vận dụng định lý Viet đảo để lập 1 phương trình bậc 2 biết 2 nghiệm cho trước hoặc hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm. Song cần chú ý điều kiện

$S^2 - 4P \geq 0$.

2.6. Xét dấu các nghiệm số:

1. Phương pháp:

Dùng định lý Viet ta có thể xét dấu các nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ dựa trên kết quả:

* Nếu $p = \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm cùng dấu.

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ p > 0 \\ s > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2$

* Nếu $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ p > 0 \\ s < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm âm: $x_1 \leq x_2 < 0$

2. Các ví dụ:

a. Cho phương trình: $mx^2 - 2(3 - m)x + m - 4 = 0$ (1)

Xác định m để phương trình:

- Có đúng 1 nghiệm âm
- Có 2 nghiệm đối nhau.

<u>**Giải:**</u> Xét 2 trường hợp:

* TH_1: Với $m = 0$ ta có: (1) $\Leftrightarrow - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$ là nghiệm âm duy nhất của phương trình.

* TH_2: Với $m \neq 0$ khi đó để (1) có đúng 1 nghiệm âm cần điều kiện là:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < 0 \le x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_{(0)} = 0 \text{ và } S < 0 \\ p < 0 \\ \Delta = 0 \text{ và } \dfrac{-b}{2a} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $m \in (0; 4]$ hoặc $m = \dfrac{9}{2}$ thì phương trình có đúng 1 nghiệm âm.

b. Cho phương trình: $2x^2 - (m - 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1)

* Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

* Xác định dấu của các nghiệm x_1, x_2 ($x_1 \le x_2$) với các giá trị tìm được của m.

<u>Giải:</u> * Vì (1) là phương trình bậc 2 ẩn x tham số m có nghiệm số

$\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 - 2(m^2 - 4m + 3) \ge 0 \Leftrightarrow - m^2 + 6m - 5 \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 \le 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 5) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le m \le 5$.

* Theo hệ thức Viet có: $P = x_1x_2 = \dfrac{m^2 - 4m + 3}{2}$

$S = x_1 + x_2 = m - 1$

\- Xét dấu của $P = x_1.x_2$.

Ta có: $m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 3$

m		1		3	
x_1x_2	+	0	-	0	+

Nếu $m = 1$ thì $p = 0$ và $s = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Nếu $m = 3$ thì $p = 0$; $s > 0 \Rightarrow 0 = x_1 < x_2$

Nếu $3 < m \le 5$ thì $p > 0$; $s > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$

Nếu $1 < m < 3$ thì $p < 0 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$.

c. Tìm giá trị của m để phương trình: $(m - 1)x^2 + 2x + m = 0$ (1)

có ít nhất 1 nghiệm không âm.

<u>* Giải:</u> * Nếu m = 1 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{-1}{2}$ < 0 vậy m = 1 (loại)

* Nếu m $\neq$ 1 thì (1) là 1 phương trình bậc 2.

Δ' = - m^2 + m + 1 $\Rightarrow$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ' $\geq$ 0

$\Leftrightarrow$ m^2 - m - 1 $\leq$ 0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

* Xét S = $\dfrac{2}{1-m}$ có 2 trường hợp:

- Nếu m < 1 $\Rightarrow$ S > 0 $\Rightarrow$ (1) có ít nhất 1 nghiệm dương

- Nếu m > 1 $\Rightarrow$ S < 0 ta chưa kết luận mà phải xét: $P = \dfrac{m}{m-1}$ vì m > 1

$\Rightarrow$ P > 0 kết hợp với S < 0 $\Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm âm nên loại m > 1.

* Kết luận: Giá trị của m cần tìm là: $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m < 1$.

* Cách giải 2:

Xét $P = \dfrac{m}{m-1}$

- (1) có nghiệm x = 0 $\Leftrightarrow$ P = 0 $\Leftrightarrow$ m = 0 (1)

- (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ P < 0 $\Leftrightarrow$ 0 < m < 1 (2)

- (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m <$ 0 (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq m < 1$

ỨNG DỤNG KHÁC

I. Phương trình đường thẳng (d):

$y = ax + b$ ($a \neq 0$) với Parabol (P): $y = mx^2$ ($m \neq 0$)

1. Dạng 1:

Lập phương trình đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua 2 điểm A (x_A; y_A); B (x_B; y_B) thuộc Parabol $y = mx^2$ ($m \neq 0$)

* Cơ sở lý luận: Do đường thẳng và Parabol có 2 giao điểm nên hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $mx^2 = ax + b \Leftrightarrow mx^2 - ax - b = 0$.

Từ đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{a}{m} \\ x_A . x_B = \dfrac{-b}{m} \end{cases}$ (*) Từ (*) tìm a và b $\Rightarrow$ PT (d)

2. Dạng 2:

Lập phương trình đường thẳng tiếp xúc với Parabol (P) tại điểm M (x_M; y_M)

* Cơ sở lý luận: Do (d) và (P) có duy nhất 1 giao điểm nên phương trình: $mx^2 - ax - b = 0$ có nghiệm kép: $x_1 = x_2$. Vận dụng hệ thức Viet, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 x_2 = \dfrac{-b}{m} \end{cases}$ $\Rightarrow$ a và b $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến.

3. Ví dụ:

a. Cho parabol (P) có phương trình: (P): $y = x^2$.

Gọi A và B là 2 điểm $\in$ (P) có hoành độ lần lượt là $x_A = -1$; $x_B = 2$. Lập phương trình dường thẳng đi và A và B.

* Giải: (Ta có thể ứng dụng hệ thức Viet).

* Giả sử phương trình đường thẳng (AB): $y = ax + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (AB) và (P) là: $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$(*).

Ta có: $x_A = -1$; $x_B = 2$ là nghiệm của phương trình (*).

Theo Viet ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = a \\ x_A x_B = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng (AB) là: $y = x + 2$

b. Cho (P): $y = \dfrac{x^2}{4}$; $A \in (P)$ có hoành độ $x_A = 2$ lập phương trình đường thẳng tiếp xúc với (P) tại A.

Giải:

Giả sử phương trình tiếp tuyến tại A là (d): $y = ax + b$. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$\frac{x^2}{4} = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 \qquad (*)$$

Ta có: $x_A = 2$ là nghiệm kép của (*) ($x_1 = x_2 = 2$)

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4a \\ x_1 x_2 = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) là: $y = x - 1$

II. bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất:

1. Từ hệ thức $S = x_1 + x_2$; $P = x_1.x_2$.

a. Nếu $S = x_1 + x_2$ không đổi còn P thay đổi.

Do: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow P \leq \dfrac{S^2}{4}$

Nên $P_{max} = \dfrac{S^2}{4} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{S}{2}$ *(Vì PT:* $x^2 - Sx + P = 0$ có nghiệm kép)

* Vậy: Nếu 2 số có tổng không đổi tích lớn nhất $\Leftrightarrow$ 2 số bằng nhau.

b. Giả sử: $x_1 > 0$; $x_2 > 0$ và $x_1.x_2 = P$ (không đổi) còn $S = x_1 + x_2$ (thay đổi)

vì $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow (S - 2\sqrt{P})(S + 2\sqrt{P}) \geq 0$

$\Leftrightarrow S - 2\sqrt{P} \geq 0 \Leftrightarrow S \geq 2\sqrt{P} \Rightarrow$> Min $S = 2\sqrt{P} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \sqrt{P}$

* Vậy: Nếu 2 số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi chúng bằng nhau.

2. Tìm cực trị của biến số trong hệ điều kiện ràng buộc.

a. Ví dụ 1: Cho a, b, c là 3 số thực thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{a} \\ a + b + c = abc \end{cases}$$ Tìm GTNN của a (Xác định b, c khi a min)

* Giải: Từ giả thiết bài toán ta có: $\begin{cases} bc = a^2 \\ b + c = abc - a = a^3 - a \end{cases}$

Theo Viet: b, c là nghiệm của phương trình bậc 2: $x^2 - (a^3 - a)x + a^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = (a^3 - a)^2 - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 [(a^2 - 1)^2 - 4] \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 3)(a^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 3$

$\Rightarrow a \geq \sqrt{3}$ $(a > 0) \Rightarrow \min a = \sqrt{3}$ tại $b = c = \sqrt{3}$

Vậy: $a_{min} = \sqrt{3}$ tại $b = c = \sqrt{3}$

* ở bài toán trên do vai trò của a, b, c như nhau nên có thể yêu cầu tìm min của1 trong các biến a, b, c.

Mặt khác, trong bài toán trên ta đã dựa vào điều kiện tồn tại của hệ thức Viet là $S^2 - 4P \geq 0$ *(Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2)* từ đó suy ra GTNN.

<u>III. bài toán chứng minh bất đẳng thức</u>

* Liên quan tới nghiệm của 1 phương trình bậc 2 ta có thể sử dụng hệ thức Viet để chứng minh bất đẳng thức có chứa các nghiệm của 1 phương trình bậc 2 đã cho. Hoặc chứng minh các bất đẳng thức có hệ điều kiện ràng buộc cho trước.

1. Ví dụ 1: Cho phương trình: $mx^2 - (m + 2)x + 1 = 0$ (1) (m là tham số).

a. Chứng minh rằng (1) có nghiệm với mọi m.

b. Giả sử (1) có 2 nghiệm là a và b.

Chứng minh rằng: $(ma - 1)^2 + (mb + 1)^2 \geq \dfrac{(m+2)^2}{2}$

__**Giải:**__

a. Với m = 0 thì (1) trở thành $- 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

(Phương trình có nghiệm với m = 0).

Với $m \neq 0$: $\Rightarrow$ (1) là 1 phương trình bậc 2 có $\Delta = (m + 2)^2 - 4m = m^2 + 4 > 0$ $\forall m$ $\Rightarrow$ (1) có nghiệm với $\forall m \neq 0$. Vậy (1) có nghiệm với $\forall m$.

b. Muốn phương trình đã cho (1) có 2 nghiệm a, b thì $m \neq 0$.

Do a, b là các nghiệm của (1) nên theo Viet ta có:

$$a + b = \frac{m+2}{m}$$

Đặt: $X = am - 1$; $Y = bm + 1 \Rightarrow X + Y = m(a + b)$

$\Rightarrow X + Y = m(m + 2) : m = m + 2$

Chứng minh được: $2 (X^2 + Y^2) \geq (X + Y)^2$ với mọi X, Y

$\Rightarrow X^2 + Y^2 \geq (X + Y)^2 / 2$ $\forall X, Y$

Thay: $X + Y = m + 2$ ta có: $X^2 + Y^2 \geq (m + 2)^2 /2$

Hay $(am - 1)^2 + (bm - 1)^2 \geq (m + 2)^2 /2$

2. Ví dụ 2: Cho x, y, z thoả mãn $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases}$ (*)

Chứng minh rằng: $1 \le x, y, z \le \frac{7}{3}$

Giải: Từ hệ (*) ta có: $\begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = 8 - x(y + z) = 8 - x(5 - x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 5 - x \\ yz = x^2 - 5x + 8 \end{cases}$$

Theo Viet: y. z là nghiệm của phương trình: $t^2 - (5 - x)t + (x^2 - 5x + 8) = 0$

Vì phương trình trên có nghiệm $\Rightarrow \Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow (5 - x)^2 - 4 (x^2 - 5x + 8) \ge 0 \Leftrightarrow - 3x^2 + 10x - 7 \ge 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le \frac{7}{3}$

Bằng cách chứng minh tương tự ta có: $1 \le y, z \le \frac{7}{3}$

* ở bài toán trên ta đã dựa vào điều kiện tồn tại 2 số y và z chính là điều kiện phương trình (*) có nghiệm số là $\Delta \ge 0$ hay $S^2 - 4P \ge 0$. Từ đó suy ra các bất đẳng thức cần chứng minh.

CÁC BIỆN PHÁP THỰC HIỆN

1. Xây dựng hệ thức Vi-ét

- Sau khi học xong công thức nghiệm của PT bậc 2 tổng quát GV hướng dẫn HS tìm ra mối quan hệ giữa các nghiệm số với các hệ số thông qua biểu thức: $x_1 + x_2 = ?$; $x_1. x_2 = ?$ Từ đây, gợi ý HS tìm tòi thêm các mối liên hệ khác để khẳng định giá trị của 2 hệ thức trên.

2. Yêu cầu HS lập mệnh đề đảo của định lý và gợi ý cách chứng minh MĐ:

Nếu có $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ và $x_1. x_2 = \frac{c}{a}$ thì x_1; x_2 là nghiệm của PT bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \ne 0$).

Hướng dẫn: $f(x) = ax^2 + bx + c = a (x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}) = \ldots = a (x - x_1)(x - x_2)$

Vì $a \neq 0$ nên $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2 \Rightarrow$ kết luận

3. Vận dụng định lý đảo của định lý Vi-ét vào bài toán tìm 2 số biết tổng và tích của chúng: $a + b = S$; $a . b = P$ ($S^2 - 4P \geq 0$) $\Rightarrow$ a, b là nghiệm của PT bậc 2: $x^2 - sx + p = 0$

Lưu ý: Trước hết xét $s^2 - 4p$ để khẳng định có tồn tại a và b hay không tồn tại a và b. Tuy nhiên nếu có 2 số x_1; x_2 là nghiệm của hệ PT: $x_1 + x_2 = s$ và $x_1x_2 = p$

thì khẳng định được ngay x_1 và x_2 là nghiệm của PT: $t^2 - st + p = 0$

4. Tiến hành thường xuyên việc nhẩm nghiệm 1 phương trình bậc2 trong các trường hợp: $a + b + c = 0$; $a - b + c = 0$

Từ đó hình thành thói quen quan sát các hệ số của 1pt bậc2 tiến hành nhẩm nghiệm nếu có; Xây dựng cho học sinh ý thức giải 1pt bậc2 đủ bằng cách Nhẩm nghiệm trước khi sử dụng công thức tổng quát; Tạo thói quen sử dụng ht Vi-ét để kiểm tra nghiệm pt bậc 2

5. Xây dựng hệ thống bài tập có ứng dụng Vi-ét ngay sau khi học xong bài "Hệ thức Vi-ét và ứng dụng".

Gồm các bài toán:

- Không phải phương trình bậc 2 mà tính tổng, tích các nghiệm; tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa 2 nghiệm. Không đối xứng giữa 2 nghiệm
- Cho trước 1 nghiệm số của phương trình bậc 2 Tìm nghiệm còn lại và tham số.
- Tìm một số biết tổng và tích của chúng
- Lập một phương trình bậc 2 biết 2 nghiệm cho trước; hoặc hai nghiệm có liên quan tới 2 nghiệm của 1 phương trình đã cho.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của 1 phương trình bậc 2 không phụ thuộc tham số.
- Tìm điều kiện của tham số (tìm tham số) sao cho các nghiệm của một phương trình bậc 2 đã cho thoả mãn 1 hệ thức (1 điều kiện cho trước).

- Tìm điều kiện của tham số để các nghiệm của phương trình bậc 2 cho trước cùng dấu, trái dấu, dương, âm…

6. Đưa hệ thức Viet vào giải 1 số phương trình, hệ phương trình "*Không mẫu mực*" như phương trình, hệ phương trình vô tỷ.

Ví dụ: Giải phương trình: $x(\frac{5-x}{x+1}).(x+\frac{5-x}{x+1})=6$ (1)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1\\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78\end{cases}$ (2)

Từ đó ý thức cho HS thấy được có những phương trình, hệ phương trình có thể chuyển về vận dụng các ứng dụng của Định lý Viet. Như ở (1) đưa về tìm A vàB sao cho: $\begin{cases}A.B = 6\\ A + B = 5\end{cases}$

ở (2) chỉ ra x > 0 ; y > 0 là điều kiện hệ có nghiệm rồi chuyển hệ về dạng $\begin{cases}(x+y)+(-\sqrt{xy})=7\\ (x+y)(-\sqrt{xy})=-78\end{cases}$

7. Đề xuất cho HS những bài toán tìm cực trị của 1 biểu thức đại số có ứng dụng hệ thức Viet như:

<u>- Khai thác:</u> $S^2 - 4p \ge 0$ trong các trường hợp S thay đổi P không thay đổi, S không đổi; P thay đổi.

Từ đó liên hệ với bất đẳng thức Côsi và ứng dụng của bất đẳng thức này.- Đưa hệ thức Viet vào bài toán tìm cực trị của các biến trong hệ điều kiện ràng buộc như:

Tìm cực trị của x, y, z biết rằng: $\begin{cases}x+y+z=5\\ xy+yz+xz=8\end{cases}$

8. **Cho HS làm quen với việc sử dụng hệ thức Viet vào bài toán chứng minh bất đẳng thức:**

Ví dụ: Cho phương trình: $x^2 - 2m^2x + 2m^2 - 2 = 0$ $(|m| > 1)$

a. Chứng minh rằng: Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b. **Giả sử: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho và $x_1 > x_2$, hãy chứng minh:** $\dfrac{1+x_1}{x_1^2+x_1+1} < \dfrac{1+x_2}{x_2^2+x_2+1}$

9. ứng dụng hệ thức Vi ét trong mặt phẳng toạ độ và trong hình học

a. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng (d) : $2x - y = a^2$ và parabol (p): $y = a x^2$

(a > 0). Tìm a để (d) cắt (p) tại 2 điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng: Khi đó A và B nằm bên phải trục tung .

* ở bài toán trên cần giúp cho học sinh chỉ ra pt hoành độ giao điểm :

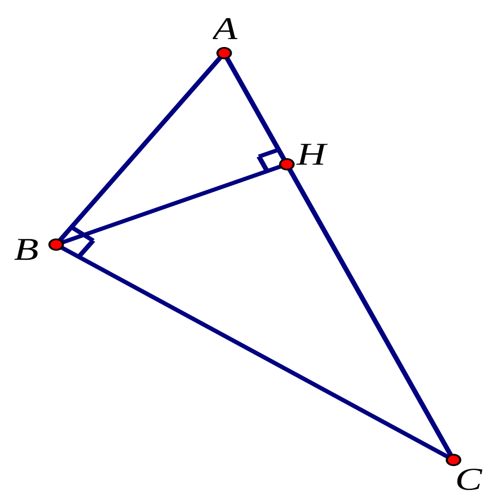
$a x^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow a x^2 - 2x + a^2 = 0$ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - a^3 > 0 \Leftrightarrow a < 1$ Vậy $0 < a < 1$ là điều kiện cần tìm.

Từ đó gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*) vận dụng hệ thức Vi-ét:

Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2}{a} > 0 \\ x_1.x_2 = a > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x_1 > 0$ và $x_2 > 0$

$\Rightarrow$ A và B nằm bên phải trục tung.



b.Cho ΔABC ($B = 90^0$);

đường cao BH = 3cm; AC = 7cm. Tính AB,BC.

* ở bài này nếu đặt vấn đề tìm AB, BC thông qua tìm AH, HC thì sự hỗ trợ của Vi-ét rất hữu

hiệu.

$$\begin{cases} AH + HC = 7 \\ AH.HC = 3^2 = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AH.HC là nghiệm PT: $x^2 - 7x + 9 = 0$.

Sau đó dễ dàng tìm được AB.AC nhờ hệ thức trong tam giác vuông

Mặt khác, có thể trực tiếp tính AB, BC nhờ vào Pitago và ứng dụng của Viet như sau:

$AB^2 + BC^2 = AC \Leftrightarrow (AB + BC)^2 - 2AB . BC = AC^2$

$\Leftrightarrow (AB = BC)^2 = 49 + 2AC . BH = 49 + 42 = 91 \Rightarrow AB + BC = \sqrt{91}$

kết hợp với AB . BC = 21 ta tìm AB và BC thông qua tìm nghiệm phương trình:

$x^2 - \sqrt{91}\,x + 21 = 0$ *(chính là bài toán tìm 2 số có tổng là S và tích làP)*

10. Sử dụng hệ thức Viet ở bài tập số học:

Ví dụ: Tìm các số nguyên a để các phương trình sau có nghiệm nguyên.

a) $x^2 - (a + 5)x + 5a + 2 = 0$ (1)

b) $x^2 + ax + 198 = a$ (2)

Hướng dẫn: a.Gọi $x_1, x_2 \in Z$ là nghiệm (1) theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 5 \\ x_1.x_2 = 5a + 2 \end{cases}$ (*)

Từ đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 5a + 25 \\ x_1.x_2 = 5a + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2 = 1 .2 = 2 . 1 = - 1.(-2) = (-2).(-1)$

$\Rightarrow a = 8$ hoặc $a = 2$.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1.x_2 = 198 - a \end{cases}$ $\Rightarrow \mathbf{x_1} + x_2 - x_1 . x_2 = -198 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199$

Do 199 là số nguyên tố nên:

$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1.199 = 199.1 = -1.(-199) = -199.(-1)$ $\Rightarrow a = 198$ hoặc $a = -2$

11. Gây động cơ nghiên cứu cho HS thông qua việc đặt vấn đề:

Ta hãy dự đoán xem với phương trình bậc 3: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) (*) khi có 3 nghiệm: x_1; x_2; x_3 thì các nghiệm này có liên hệ với các hệ số a, b, c, d như thế nào ? sau đó GV giới thiệu định lý Viet mở rộng cho phương trình bậc 3. Nếu phương trình bậc 3 (*) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có 3 hệ thức sau giữa các nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{-d}{a} \end{cases}$$

(Định lý này không yêu cầu chứng minh vì sẽ được học ở chương trình toán cấp 3).

12. ***Thường xuyên nhấn mạnh việc tìm điều kiện cho mộtphương trình bậc hai có nghiệm số trước khi áp dụng hệ thức Vi-ét trong các bài toán về phương trình bậc hai có liên quan tới quan hệ giữa các nghiệm số; đặc biệt là phương trình bậc hai chứa tham số.***

PHẦN THỰC NGHIỆM

1. TIẾT 57 – HỆ THỨC VI – ET VÀ ỨNG DỤNG

Thực hiện:***Đặng Thị Hương***

I. Mục tiêu.

1. Kiến thức : - Học sinh nắm vững định lí vi - et.

2. Kỹ năng : - Học sinh vân dụng được ứng dụng của định lí Viét :

- Biết nhẩm nghiệm của phương trìng bậc hai trong các trường hợp a + b + c = 0 ; a – b + c = 0 hoặc trường hợp tổng và tích của hai nghiệm là những số nguyên với giá trị tuyệt đối không quá lớn.
- Tìm được hai số khi biết tổng và tích của chúng.

II. Chuẩn bị.

- GV : Bảng phụ ghi định lí, bài tập
- HS : Đọc trước bài.

III.Phương pháp :

- Nêu vấn và giải quyết vấn đề

- Làm việc cá nhân kết hợp hoạt động nhóm nhỏ.

IV.Tiến trình dạy học.

A. ổn định lớp.(1')

B. KTBC.(5')

-H1 : Viết công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

C. Bài mới.

ĐVĐ: (40s)Ta đã biết công thức nghiệm của phương trình bậc hai, vậy các nghiệm của phương trình bậc hai còn có mối liên hệ nào khác với các hệ số của phương trình hay không? Để trả lời câu hỏi này ta vào bài học hôm nay.

Giáo viên	Học sinh	Ghi bảng
	1. Hệ thức Viét(15')	
- Dựa vào công thức nghiệm trên bảng, hãy tính tổng và tích của hai nghiệm (trong trường hợp pt có nghiệm) -Nhận xét bài làm của Hs => định lí. -Nhấn mạnh: Hệ thức Viét thể hiện mối liên hệ giữa nghiệm và các hệ số của phương trình. -Nêu vài nét về tiểu sử nhà toán học Pháp Phzăngxoa Viét (1540 – 1603) ? Tính tổng và tích các nghiệm của pt sau: $2x^2 - 9x + 2 = 0$ -Yêu cầu Hs làm ?2, ?3 -Gọi đại diện nhóm lên bảng trình bày. -Sau khi hai Hs làm bài xong, Gv gọi Hs nhận xét, sau đó chốt lại:	-Một em lên bảng làm ?1 -Dưới lớp làm bài vào vở. 2--> 3 em đọc lại định lí Viét Sgk/51 -áp dụng hệ thức Viét để tính tổng và tích các nghiệm. +Nửa lớp làm ?2 +Nửa lớp làm ?3 -Hai em lên bảng làm -Nhận xét bài làm trên bảng.	?1 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ ***Định lí Viét** : Sgk/51. ?2 Cho phương trình : a, $2x^2 – 5x + 3 = 0$ a = 2 ; b = -5 ; c = 3 a + b + c = 2 – 5 + 3 = 0 b, Có : $2.1^2 – 5.1 + 3 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 1$ là một ghiệm của pt. c, Theo hệ thức Viét : $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ có $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$?3 Cho pt : $3x^2 + 7x + 4 = 0$

TQ: cho pt $ax^2 + bx + c = 0$ +Nếu: a + b + c = 0 ➔ $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$. + Nếu : a – b + c = 0 ➔ $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$. -Yêu cầu Hs làm ?4 ?Khi giải pt bậc hai ta cần chú ý gì. **-Chốt** : Khi giải pt bậc hai ta cần chú ý xem .....--> cách giải phù hợp.	-Trả lời miệng -Kiểm tra xem pt có nhẩm nghiệm được không, có là phương trình khuyết không --> tìm cách giải phù hợp.	a, a = 3 ; b = 7 ; c = 4 a – b + c = 3 – 7 + 4 = 0 b, có : $3.(-1)^2 + 7.(-1) + 4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = -1$ là một nghiệm của pt. c, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$ *__Tổng quát__ : (SGK) ?4 a, $-5x^2 + 3x + 2 = 0$ Có : a + b + c = -5 + 3 + 2 = 0 $\Rightarrow x_1 = 1 ; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$ b, $2004x^2 + 2005x + 1 = 0$ Có : a – b + c = 2004 – 2005 + 1 = 0 $\Rightarrow$ $x_1 = -1 ; x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2004}$

2. Tìm hai số biết tổng và tích của nó.(12')

-Hệ thức Viét cho ta biết cách tính tổng và tích các nghiệm của pt bậc hai. Ngược lại nếu biết tổng của hai số nào đó là S, tích là P thì hai số đó có thể là nghiệm của một pt nào chăng? -Yêu cầu Hs làm bài toán. ? Hãy chọn ẩn và lập pt bài toán ? Phương trình này có nghiệm khi nào -Nêu KL: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của pt: $x^2 – Sx + P = 0$ -Yêu cầu Hs tự đọc VD1 Sgk -Yêu cầu Hs làm ?5	-Nghe Gv nêu vấn đề sau đó làm bài toán +Chọn ẩn +Pt có nghiệm khi $\Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow S^2 – 4P \geq 0$ -Nghe sau đó đọc VD1 Sgk	<u>**Bài toán:**</u> Tìm hai số biết tổng của chúng bằng S, tích của chúng bằng P. <u>**Giải**</u> - Gọi số thứ nhất là x thì số thứ hai là S – x - Tích hai số là P $\Rightarrow$ pt: x(S – x) = P $\Leftrightarrow x^2 – Sx + P = 0$ (1) KL: Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình (1). Điều kiện để có hai số là: $S^2 – 4P \geq 0$. VD1/(SGK) ?5

-Cho Hs đọc VD2 và giải thích cách nhẩm nghiệm.	-Một em lên bảng làm ?5 -Đọc VD2	S = 1; P = 5 $\Rightarrow$ Hai số cần tìm là nghiệm của pt: $x^2 - 5x + 5 = 0$ $\Delta = 1^2 - 4.5 = -19 < 0$ $\Rightarrow$ pt vô ghiệm Vậy không có hai số thỏa mãn điều kiện bài toán VD2: Nhẩm nghiệm pt $x^2 - 5x + 6 = 0$

D. Củng cố.(10')

? Phát biểu hệ thức Viét và viết công thức.

Dạng 1: Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số.

- Bài 25/52-Sgk. Gv: Đưa bài tập lên bảng phụ.

Hs: Một em lên bảng điền, dưới lớp làm vào vở.

Không giải phương trình, hãy điền vào chỗ (...)

a, $2x^2 - 17x + 1 = 0$; Δ = ... ; $x_1 + x_2$ = ... ; $x_1.x_2$ = ...

b, $5x^2 - x - 35 = 0$; Δ = ... ; $x_1 + x_2$ = ... ; $x_1.x_2$ = ...

c, $8x^2 - x + 1 = 0$; Δ = ... ; $x_1 + x_2$ = ... ; $x_1.x_2$ = ...

d, $25x^2 + 10x + 1 = 0$; Δ = ... ; $x_1 + x_2$ = ... ; $x_1.x_2$ = ...

Dạng 2: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm

? Nêu cách tìm hai số biết tổng của chúng là S và tích của chúng bằng P.ở mỗi dạng trong tiết này GV phải giúp học sinh nắm chắc cách giải.

E. Hướng dẫn về nhà.(2')

- Học thuộc định lí Viét và cách tìm hai số khi biết tổng và tích.
- Nắm vững các cách nhẩm nghiệm. - BTVN: 26, 27, 28/53-Sgk.

IV. Rút kinh nghiệm.

2. TIẾT 58 – LUYỆN TẬP

Thực hiện:***Đặng Thị Hương***

I. Mục tiêu. - Củng cố hệ thức Vi - ét - Rèn luyện kỹ năng vận dụng hệ thức Vi-ét để:

- Tính tổng, tích các nghiệm của phương trình bậc hai.
- Nhẩm nghiệm của phương trình trong các trường hợp có a + b + c = 0; a – b + c = 0 hoặc qua tổng, tích của hai nghiệm (Hai nghiệm là những số nguyên không quá lớn)
- Tìm hai số biết tổng và tích của nó.
- Lập pt biết hai nghiệm của nó.

- Phân tích đa thức thành nhân tư nhờ nghiệm của nó.

II. Chuẩn bị. -Gv : Bảng phụ ghi bài tập -Hs : Học kỹ hệ thức Viét, xem trước bài tập.

III.Phương pháp :

- Phân tích, tổng hợp. Nêu vấn và giải quyết vấn đề
- Làm việc cá nhân kết hợp hoạt động nhóm nhỏ.

IV.Tiến trình dạy học.

A. ổn định lớp.(1')

B. KTBC. (5')

-H1 : Viết hệ thức Viét, tính tổng và tích các ngiêm của các pt sau

a, $2x^2 - 7x + 2 = 0$ b, $5x^2 + x + 2 = 0$

-H2 : Nhẩm nghiệm các pt sau :

a, $7x^2 - 9x + 2 = 0$ b, $23x^2 - 9x - 32 = 0$

C. Luyện tập(35').

Giáo viên	Học sinh	Ghi bảng
Dạng 1: Không giải phương trình, tính tổng và tích các nghiệm số.		
- Đưa đề bài lên bảng ? Tìm m để pt có nghiệm. Tính tổng và tích các nghiệm của pt. - Có thể gợi ý: Phương trình có nghiệm khi nào?	- Hai em lên bảng làm bài -Từ đó tính Δ hoặc Δ' rồi tìm m để pt có nghiệm.	**Bài 30/54-Sgk.** a, $x^2 - 2x + m = 0$ +) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ +) Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = m$ b, $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ +) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - m^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow -2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$ +) Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2(m-1)$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a} = m^2$
Dạng 2: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm		
- Đưa đề bài lên bảng. ? Có những cách nào để nhẩm nghiệm của pt bậc hai. - Cho 3 tổ, mỗi tổ làm	C_1: a + b + c = 0 C_2: a - b + c = 0 C_3: áp dụng hệ thức Viét -Đại diện 3 tổ lên bảng làm bài - Nhận xét bài trên	**1. Bài 31/54-Sgk.** Nhẩm nghiệm pt: a, $1{,}5x^2 - 1{,}6x + 0{,}1 = 0$ Có: a + b + c = 0,5 – 0,6 + 0,1 = 0 $\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{15}$ b, $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$ Có: $a - b + c = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1 = 0$

một câu a, b, d. - Gọi Hs nhận xét bài làm trên bảng. ? Vì sao cần điều kiện $m \neq 1$ - Đưa thêm câu e, f lên bảng ? Nêu cách nhẩm nghiệm của hai pt này. - Gọi Hs tại chỗ trình bày lời giải.	bảng. $m \neq 1$ để $m - 1 \neq 0$ thì mới tồn tại pt bậc hai. - áp dụng hệ thức Viét - Tại chỗ trình bày	$\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d. $(m-1)x^2 - (2m+3)x + m + 4 = 0$ $(m \neq 1)$ Có: $a + b + c = m - 1 - 2m - 3 + m + 4 = 0$ $\Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+4}{m-1}$. e, $x^2 - 6x + 8 = 0$ Có: $\begin{cases} 2+4=6 \\ 2.4=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ f. $x^2 - 3x - 10 = 0$ Có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1.x_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$
Dạng 3: Tìm hai số biết tổng và tích của chúng		
?Nêu cách tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng.	- Nêu cách làm --> áp dụng vào giải bài tập	**Bài 32/54-Sgk.** Tìm u, v biết a, $u + v = 42;\ u.v = 441$ Giải u,v là hai nghiệm của pt: $x^2 - 42x + 441 = 0$ $\Delta' = 21^2 - 441 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 21$ Vậy hai số cần tìm là: $u = v = 21$.
Dạng 4:Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm của nó		
- Nêu đề bài, hướng dẫn Hs làm bài: + Tính tổng, tích của chúng. + Lập pt theo tổng và tích của chúng. - Yêu cầu Hs giải tương tự phần a - Đưa đề bài lên bảng phụ: Chứng tỏ nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì tam thức $ax^2 + bx + c =$ $a(x - x_1)(x - x_2)$	 - Theo dõi đề và làm bài theo hướng dẫn của Gv - Một em lên bảng làm bài - Theo dõi đề bài và tìm cách chứng minh.	**Bài 42/44-Sbt.** Lập phương trình có hai nghiệm là: a, 3 và 5 có: $S = 3 + 5 = 8$ $P = 3.5 = 15$ Vậy 3 và 5 là hai nghiệm của pt $x^2 - 8x + 15 = 0$ b, - 4 và 7 **Bài 33/54-Sgk.** $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ $= a[x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a}]$ $= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2]$ $= a[(x - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)] = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Phân tích hdẫn Hs làm bài - $\frac{b}{a}$ = ? $\frac{c}{a}$ = ? Sau đó đưa bài giải lên bảng phụ.	- Thay - $\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ $\frac{c}{a} = x_1.x_2$ - Từ kết quả trên áp dụng vào làm bài cụ thể.	a, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ có: $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ Vậy: $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)(x - \frac{3}{2})$ $= (x-1)(2x-3)$

D. Củng cố. (2')
?Ta đã giải những dạng toán nào?
?áp dụng những kiến thức nào để giải các dạng toán đó, Phương pháp giải các dạng toán đó?
GV chốt kiến thức cho hs bằng việc đưa ra bài toán tổng quát trên phiếu (mỗi HS 01phiếu) **LOẠI TOÁN RÈN KỸ NĂNG SUY LUẬN**

(Phương trình bậc hai chứa tham số)

Bài toán tổng quát

Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$) có:

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$
2. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$
3. Nghiệm duy nhất (nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau) $\Leftrightarrow \Delta = 0$
4. Có hai nghiệm phân biệt (khác nhau) $\Leftrightarrow \Delta > 0$
5. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$
6. Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0 \Leftrightarrow a.c < 0$
7. Hai nghiệm dương(lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S > 0$ và $P > 0$
8. Hai nghiệm âm(nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S < 0$ và $P > 0$
9. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $S = 0$
10. Hai nghiệm nghịch đảo nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P = 1$
11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S < 0$
12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn

$\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S > 0$ (ở đó: $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$)

** Giáo viên cần cho học sinh tự suy luận tìm ra điều kiện tổng quát, giúp học sinh chủ động khi giải loại toán này)*

E. Hướng dẫn về nhà.(2')

- Ôn lại lí thuyết cơ bản từ đầu chương III
- Xem lại các dạng bài tập đã chữa.
- BTVN: 39, 41 ,42/44-Sbt- Tiết sau kiểm tra 45'

IV. Rút kinh nghiệm.

3.CHUYÊN ĐỀ NHÓM TOÁN 9 – THCS Thái Thịnh

"Hệ thức vi – ét và các ứng dụng"

Thực hành: *Đ/c Nguyễn Cao cường*

HỆ THỨC VI – ÉT VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I- LÝ THUYẾT CƠ BẢN.

1- **Định lí Vi-ét.**

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Chứng minh:

Do x_1 và x_2 là hai nghiệm của pt (1) nên: $a(x - x_1).(x - x_2) = ax^2 + bx + c$ với $\forall$ x

$\Leftrightarrow ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 - (ax_1+ ax_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(ax_1 + ax_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

2- **Chú ý:**

Nếu hai số có tổng S và tích P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 .$$

Điều kiện tồn tại hai số đó là: $S^2 - 4P > 0$.

II- CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN.

DẠNG 1: ***Áp dụng hệ thức Vi-ét vào tìm giá trị của tham số m để phương trình thoả mãn điều kiện T cho trước.***

* **Bài toán cơ bản**:

Tìm giá trị của tham số m để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (I) Có nghiệm thảo mãn điều kiện T cho trước.

*** Phương pháp:**

Để phương trình (I) có nghiệm ta phải có: $\Delta \geq 0$ (*)

Khi đó theo hệ thức vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Để tìm giá trị của tham số m ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \\ \text{Điều kiện T} \end{cases}$$ so sánh với điều kiện (*) và kết luận bài toán.

Bài toán 1: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 = 2x_2$.

Bài giải:

Để phương trình (2) có nghiệm ta phải có:

$$\Delta' = (-m)^2 - (2m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1) \geq 0 \quad \text{với } \forall m$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 theo hệ thức Vi-ét ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (*) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 1 & (**) \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện $x_1 = 2x_2$

Thay vào (*) ta có: $2x_2 + x_2 = 2m \Rightarrow x_2 = \dfrac{2m}{3}; x_1 = \dfrac{4m}{3}$

Thay vào (**) ta có: $\dfrac{2m}{3}.\dfrac{4m}{3} = 2m - 1 \Leftrightarrow 8m^2 - 18m + 9 = 0$

Giải phương trình ẩn m ta được : $m_1 = \dfrac{3}{2}; \quad m_2 = \dfrac{3}{4}$ (thoả mãn)

Vậy $m_1 = \dfrac{3}{2}; \quad m_2 = \dfrac{3}{4}$ thì phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 = 2x_2$.

Bài toán 2: Cho phương trình $x^2 - mx + m + 1 = 0$ (2)

Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn

$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 19 = 0$.

Bài giải:

Để phương trình (2) có nghiệm ta phải có: $\Delta = m^2 - 4m - 4 \geq 0$ (*)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 + 2\sqrt{2} \\ m \leq 2 - 2\sqrt{2} \end{array} \right.$ (**)

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 ,x_2 theo hệ thức vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$$

Từ $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) - 19 = 0 \Leftrightarrow m + 1 + 2m - 19 = 0$

$\Leftrightarrow 3m = 18 \Leftrightarrow m = 6$ (Thoả mãn (**)) Vậy m = 6 là giá trị cần tìm.

*Lưu ý**: Trong quá trình tìm điều kiện để phương trình có nghiệm nếu điều kiện là một phương trình hay bất phương trình mà ta giải nó gặp khó khăn , chẳng hạn như bài tập trên điều kiện là $m^2 - 4m - 4 \geq 0$ thì ta có thể không giải phương trình hay bất phương trình đó. Sau khi tìm được m thì thay vào xem có thoả mãn không.

Ví dụ ở bài tập trên tìm được x = 6 ta thay vào (*) ta có: $\Delta = 6^2 - 4.6 - 4 = 8 > 0$, vậy m = 6 thoả mãn (*)

<u>Bài toán 3</u>: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ (3)

Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm x_1 ,x_2 thảo mãn :

$A = 10 x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

Bài giải:

Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Ä' $= m^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$ (*)

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 ,x_2 theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 10 \end{cases}$$

Từ $A = 10 x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 8 x_1x_2 = (2m + 2)^2 + 8(2m + 10)$
$= 4m^2 + 24m + 84 = (2m + 6)^2 + 48 \geq 48$

Min A = 48 khi 2m + 6 = 0 hay m = -3.(tmđk*)

Vậy m =-3 thì A đạt giá trị nhỏ nhất và MinA = 48.

<u>Bài toán 4</u> : Gọi x_1 ,x_2 là hai nghiệm của phương trình:

$$2x^2 + 2(m + 1) x + m^2 + 4m + 3 = 0 \quad (4)$$

Tìm giá trị lớn nhất của $M = |x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2|$

Bài giải:

Phương trình (4) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Ä' $= -m^2 - 6m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \leq 0$
$\Leftrightarrow (m+1)(m+5) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1 \quad (*)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 ,x_2 theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m^2 + 4m + 3}{2} \end{cases}$$

Từ $M = \left|x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2\right| = \left|x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right)\right| = \left|\dfrac{m^2+4m+3}{2} + 2m + 2\right|$

$= \left|\dfrac{m^2+8m+7}{2}\right| = \dfrac{1}{2}\left|m^2+8m+7\right| = -\dfrac{1}{2}\left(m^2+8m+7\right)$ vì với $-5 \le m \le -1$ thì $m^2 + 8m + 7 < 0$.

$M = -\dfrac{1}{2}\left[\left(m+4\right)^2 - 9\right] = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\left(m+4\right)^2 \le \dfrac{9}{2}$

Max M $= \dfrac{9}{2}$ khi $\left(m+4\right)^2 = 0$ hay m = - 4 .(tmđk*)

Vậy m = - 4 thì M đạt giá trị lớn nhất và $MaxM = \dfrac{9}{2}$.

<u>Bài toán 5</u> : Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (5)

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với ∀ m.

b/ Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)}$.

Bài giải:

a/ Có $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \ge 0$ với ∀ m. Vậy phương trình (5) luôn có nghiệm với ∀ m.

b/ Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 ,x_2 theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Từ $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_1x_2 + 1\right)} = \dfrac{2m - 2 + 3}{m^2 + 2} = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$

$\Leftrightarrow m^2P + 2P = 2m + 1 \Leftrightarrow m^2P + 2m + 2P - 1 = 0$

Để tồn tại P thì phải tồn tại m vậy phương trình ẩn m trên phải có nghiệm hay:

$\Delta'_m = 1 - 2P^2 + P \ge 0 \Leftrightarrow \left(P-1\right)\left(2P+1\right) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2} \le P \le 1$

Min P $= \dfrac{-1}{2}$ khi m=-2.(tm)

Max P = 1 khi m=1.(tm)

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{-1}{2}$.

* **Nhận xét**: Đối với những biểu thức chỉ chứa các nghiệm của phương trình cho trước muốn tìm giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất ta làm theo trình tự sau:

+Trước hết ta phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm .

+Biến đổi biểu thức xuất hiện tổng hai nghiệm và tích hai nghiệm .

+Từ đó áp dụng hệ thức Vi -ét thay vào được biểu thức chỉ chứa tham số m. Ta tiến hành tìm GTNN, GTLN của biểu thức với ẩn m.

<u>Bài toán 6</u>: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1) x + m -1 = 0$ (6)

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall$ m.

b/ Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của phương trình. Chứng minh rằng biểu thức:

$A = x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)$ không phụ thuộc vào giá trị của m.

Bài giải:

a/ Có $\Delta' = \left[-(m+1)\right]^2-(m-1)=m^2+m+2=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ với $\forall$ m.

Vậy phương trình (6) luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall$ m.

b/ Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 ,x_2 theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1\cdot x_2=m-1 \end{cases}$$

Từ $A = x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)=(x_1+x_2)-2x_1x_2=2m+2-2(m-1)=4$

Vậy giá trị của biểu thức A không phụ thuộc vào giá trị của m.

<u>DẠNG 2</u>: **Hệ thức Vi-ét trong sự tương giao hàm số.**

*** Phương pháp:**

Cho hàm số: $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (P)

và : $y = mx + n$ (d)

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0. \quad \text{(II)}$$

+/ Nếu phương trình (II) có hai nghiệm phân biệt thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

+/ Nếu phương trình (II) có nghiệm kép thì (d) tiếp xúc với (P).

+/ Nếu phương trình (II) vô nghiệm thì (d) không có điểm chung với cắt (P).

<u>Bài toán 7</u> : Cho hàm số $y = x^2$ (P) và $y = 3x + m^2$ (d)

a/ Chứng minh rằng với bất kì giá trị nào của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b/ Gọi y_1 , y_2 là tung độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $y_1 + y_2 = 11y_1y_2$.

Bài giải:

a/ Hoành độ giao điểm của d và P là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x + m^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 = 0 \quad (7)$$

Xét $\Delta = 9+4m^2>0$ với $\forall$m nên phương trình (7) có hai nghiệm phân biệt với mọi m , chứng tỏ (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b/ Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình (7) . Gọi hai nghiệm đó là x_1 ,x_2 , theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m^2 \end{cases}$$

Ta có các tung độ tương ứng là: $y_1 = x_1^2$; $y_2 = x_2^2$

Từ $y_1 + y_2 = 11y_1y_2$ ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 11x_1^2.x_2^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 11(x_1x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 + 2m^2 - 11m^4 = 0 \Leftrightarrow 11m^4 - 2m^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)(11m^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \quad \text{(tm)}$$

Vậy với $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

<u>Bài toán 8</u> : Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P)

a/ Gọi A và B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị có hoành độ là 1 và -2. Viết phương trình đường thẳng AB.

b/ Đường thẳng $y = x + m - 2$ (d).

(d) cắt (P) tại hai đểm phân biệt . Gọi x_1 , x_2 là hoành độ hai giao điểm ấy. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 + 20 = x_1^2 \cdot x_2^2$.

Bài giải:

a/ $A \in (P)$, $x_A = 1 \Rightarrow y_A = -\frac{1}{2}1^2 = -\frac{1}{2}$; $B \in (P)$, $x_B = -2 \Rightarrow y_B = -\frac{1}{2}(-2)^2 = -2$

Vậy $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$; $B(-2; -2)$. Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-2 + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y + \frac{1}{2}}{\frac{-3}{2}} \qquad \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{(AB)}$$

b/ Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$-\frac{1}{2}x^2 = x + m - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m - 4 = 0 \qquad (8)$$

Do (d) cắt (P) tại hai đểm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt (8) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Delta' = 5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$ (*)

Gọi hai nghiệm đó là x_1 ,x_2 , theo hệ thức vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 4 \end{cases}$

Từ $x_1^2 + x_2^2 + 20 = x_1^2 \cdot x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1^2x_2^2 + 20 = 0$

Thay vào ta có: $(-2)^2 - 2(2m-4) - (2m-4)^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m - 16 = 0$

Giải phương trình tìm được $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$ kết hợp với điều kiện (*) ta có m = -1 thoả mãn điều kiện bài toán nên với m = -1 là giá trị cần tìm.

<u>Bài toán 9</u> : Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P) và điểm M (1; -2).

a/ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M và có hệ số góc m.

b/ Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

c/ Gọi x_A ; x_B là hoành độ của A và B. Tìm m để $x_A^2x_B + x_Ax_B^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị này.

Bài giải:

a/ Đường thẳng có hệ số góc m có dạng : y = mx + b

Đường thẳng đó đi qua điểm M (1; -2) nên ta có: -2 = m + b $\Rightarrow$ b = - m -2

Vậy đường thẳng cần tìm là: y = mx - m - 2 (d)

b/ Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình :

$$-\frac{1}{2}x^2 = mx - m - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 2m - 4 = 0 \qquad (9)$$

Xét Δ' = m^2 +2m + 4 = $(m+1)^2 + 3 > 0$ với $\forall m$, do đó (d) cắt (P) tại hai đểm phân biệt với $\forall$ m.

c/ Khi đó x_A ,x_B là nghiệm của phương trình (1) , theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = -2m - 4 \end{cases}$$

Từ $x_A^2x_B + x_Ax_B^2 = x_Ax_B(x_A + x_B)$

$$= (-2m-4)(-2m)$$
$$= 4m^2 + 8m + 4 + (-4)$$
$$= (2m+2)^2 + (-4) \geq -4$$

Vậy Min ($x_A^2x_B + x_Ax_B^2$) = - 4 khi 2m + 2 = 0 hay m = -1

Kết luận: Với m = -1 thì $x_A^2x_B + x_Ax_B^2 + 9$ giá trị nhỏ nhất, giá trị đó bằng -4.

<u>DẠNG 3</u>: **Lập phương trình bậc hai một ẩn.**

*** Phương pháp:**

Bước 1: Tính tổng hai nghiệm và tích hai nghiệm.

Bước 2: Nếu hai số có tổng S và tích P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 .$$

Điều kiện tồn tại hai số đó là: $S^2 - 4P > 0$.

<u>Bài toán 10</u>: Lập phương trình bậc hai biết hai nghiệm của nó là:

a/ 1 và - 6 b/ $\sqrt{2}-1$ và $3+\sqrt{2}$ c/ m và m -1.

Bài giải :

a/ Có $x_1 = 1$ $x_2 = -6$. Ta có tổng hai nghiệm là: $x_1 + x_2 = 1 + (-6) = -5$

Tích hai nghiệm là: $x_1x_2 = 1\cdot(-6) = -6$

Vậy phương trình cần lập là: $x^2 + 5x - 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -6$.

Các phần khác tương tự.

<u>Bài toán 11</u>: Cho phương trình $x^2 + 2x - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 .

Hãy lập phương trình bậc hai biết hai nghiệm của nó là: $\frac{x_1}{x_2}$ và $\frac{x_2}{x_1}$.

Bài giải :

a/ Ta có : $\Delta' = 1^2 - 1.(-5) = 6 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2.

Phương trình cần lập có:

Tổng hai nghiệm là: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(-2)^2 - 2(-5)}{-5} = -\frac{14}{5}$

Tích hai nghiệm là: $\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1} = 1$ .Vậy phương trình cần lập là: $y^2 + \frac{14}{5}y + 1 = 0$.

* **Lưu ý** : Để lập được phương trình bậc hai một ẩn có hai nghiệm cho trước thì còn cách khác nữa chẳng hạn: phương trình có nghiệm x = a và x = b là (x - a)(x - b) = 0

$\Leftrightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0$ (Vận dụng phương trình tích), xong lập phương trình bậc hai một ẩn sử dụng định lí vi-ét đảo đa số học sinh dễ hiểu và vận dụng tốt hơn.

<u>DẠNG 4</u>: **Giải hệ phương trình đối xứng loại I**

(Hệ phương trình đối xứng loại I là hệ phương trình mà khi thay đổi vai trò hai ẩn cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi)

<u>Bài toán 12</u> : Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

Bài giải:

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2xy=25\\ xy=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=49\\ xy=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\pm 7\\ xy=12\end{cases}$$

* Nếu $\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}$ thì x và y là nghiệm của phương trình $t^2-7t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\ t=3\end{array}\right.$ (tm)

* Nếu $\begin{cases}x+y=-7\\ xy=12\end{cases}$ thì x và y là nghiệm của pt : $t^2+7t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-4\\ t=-3\end{array}\right.$ (tm)

Vậy hpt đã cho có bốn nghiệm là: $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$; $\begin{cases}x=-4\\ y=-3\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases}$

<u>Bài toán 13</u> : Giải hệ phương trình $\begin{cases}5(x+y)+2xy=-19\\ x+y+3xy=-35\end{cases}$

Bài giải:

Đặt x + y = S và xy = P ta có: $\begin{cases}5S+2P=-19\\ S+3P=-35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=1\\ P=-12\end{cases}$

Thay vào ẩn phụ ta có $\begin{cases}x+y=1\\ xy=-12\end{cases} \Rightarrow$ x và y là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2-t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-3\end{array}\right. \text{ (tm)}$$

Vậy hpt đã cho có hai nghiệm là: $\begin{cases}x=4\\ y=-3\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\ y=4\end{cases}$

<u>Bài toán 14</u>: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=m+6\\ 2x+xy+2y=m\end{cases}$

a/ Giải hệ phương trình với m = 1.
b/ Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài giải:

a/ Khi m = 1 thay vào pt ta có hệ: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7\\ 2x+xy+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-xy=7\\ 2(x+y)+xy=1\end{cases}$

Đặt x + y = S và xy = P ta có: $\begin{cases}S^2-P=7\\ 2S+P=1\end{cases}$

Cộng vế với vế sau đó chuyển vế ta có:

$S^2 + 2P - 8 = 0$. Giải phương trình ẩn S ta tìm được: $\left[\begin{array}{l} S_1 = 2 \\ S_2 = -4 \end{array}\right.$

+/ Nếu $S_1 = 2 \Rightarrow P_1 = -3$ vậy ta có: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$ thì x và y là nghiệm của phương trình $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \end{array}\right.$ (tm)

+/ Nếu $S_2 = -4 \Rightarrow P_2 = 9$ vậy ta có: $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 9 \end{cases}$ thì x và y là nghiệm của phương trình $t^2 + 4t + 9 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy hpt đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

b/ Ta có $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = m + 6 \\ 2(x + y) + xy = m \end{cases}$

Đặt x + y = S và xy = P ta có: $\begin{cases} S^2 - P = m + 6 \\ 2S + P = m \end{cases}$

Cộng vế với vế sau đó chuyển vế ta có: $S^2 + 2P - 2m - 6 = 0$ (10) .

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình (10) ẩn S phải có nghiệm duy nhất(Do $a \neq 0$, nên nghiệm duy nhất là nghiệm kép).

$\Leftrightarrow \Delta' = 0$. Ta có $\Delta' = 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{2}$ (tm)

Vậy với $m = -\frac{7}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

* **Kết luận** : Phương pháp chung để giải các hệ phương trình trên khi sử dụng định lí Vi-ét đảo bằng cách biến đổi hệ phương trình về dạng $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ khi đó x và y là nghiệm của phương trình $t^2 - S \cdot t + P = 0$ hoặc đưa về dạng hệ phương trình có chứa $x + y = S$ và $xy = P$, giải phương trình hoặc hệ phương trình ẩn S và P trên và xác định được nghiệm xcủa hệ phương trình.

III- BÀI TOÁN VẬN DỤNG.

Bài toán 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$.

a/ Giải phương trình với m = 5.

b/ Trong trường hợp phương trình có nghiệm x_1 ,x_2 , hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 ,x_2 không phụ thuộc vào m.

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của $x_1^2 + x_2^2$.

Bài toán 2: Cho phương trình $x^2 + (2m - 1)x - m = 0$.

a/ Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với $\forall$ m.

b/ Gọi x_1 , x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Tìm giá trị của m để $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài toán 3 : Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ (P) và điểm M (1; -2).

a/ Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và có hệ số góc m luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B với mọi m.

b/ Gọi x_A ; x_B là hoành độ của A và B. Tìm m để $x_A^2 + x_B^2 - 2x_Ax_B(x_A + x_B)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị này.

Bài toán 4 : Cho hàm số $y = 2x^2 - 6x - m + 1$ $(*)$ với m là tham số.

a/ Khi m = 9 tìm x để y = 0.

b/ Tìm m để đường thẳng y = x + 1 cắt đồ thị hàm số (*) tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ trung điểm của đoạn thẳng nối hai giao điểm đó.

Bài toán 5 : Giải hệ phương trình:

a/ $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$ c/ $\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 18 \\ x(y+1) + y(x+1) = 72 \end{cases}$

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = m \end{cases}$ có nghiệm.

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ vô nghiệm.

KẾT QUẢ VÀ BÀI HỌC KINH NGHIỆM

*** KẾT QUẢ CỤ THỂ**

Qua trắc nghiệm và khảo sát các đối tượng HS, sau khi cung cấp cho HS nội dung kiến thức kỹ năng các ứng dụng của Vi-et, kết quả bước đầu thu được:

-100% số HS biết kiểm tra nghiệm của 1 phương trình bậc 2 bằng hệ thức Viet.

- 98% số HS thành thạo nhẩm nghiệm phương trình bậc 2 ở 2 trường hợp: $a + b + c = 0$; $a – b + c = 0$.

- 80% số HS biết nhẩm nghiệm phương trình bậc 2 bằng định lý Viet đảo: $\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = s \\ x_1.x_2 = p \end{matrix}\right\}$ x_1, x_2 là nghiệm phương trình bậc 2

- 100% số HS biết tìm 2 số biết tổng, tích và lập phương trình bậc 2 biết 2 nghiệm cho trước.

- 85% số HS tính được giá trị các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của phương trình bậc 2 cho trước.

- 80% số HS tìm được hệ thức liên hệ giữa các nghiệm số không phụ thuộc tham số.

- 85% số HS tìm được điều kiện của tham số để 2 nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức (điều kiện cho trước).

- 90% số HS xét dấu được các nghiệm số của một phương trình bậc 2.

HS tìm được điều kiện của tham số để 2 nghiệm phương trình bậc 2 có dấu cho trước.

- 85% số HS sử dụng hệ thức Viet vào tìm phương trình đường thẳng đi qua A (x_A, y_A); B (x_B,y_B) thuộc parabol $y = mx^2$ ($m \neq 0$).

Lập phương trình đường thẳng tiếp xúc với parabôn (p) tại M(x_M, y_M).

- 90% số HS vận dụng hệ thức Vi -et vào tìm cực trị ở các trường hợp:

a) $S = x_1 + x_2$ (không đổi) P thay đổi, $P = x_1 . x_2$

b) P= x_1 . x_2(không đổi) S thay đổi

- 80% số HS biết tìm cực trị của biến trong hệ điều kiện ràng buộc.

- 90% số HS vận dụng được hệ thức Vi-et và ứng dụng vào bài tập chứng minh bất đẳng thức.

- 85% số HS biết vận dụng hệ thức Vi-et vào giải bài toán hình học.

- 90% số HS vận dụng được hệ thức Vi-et vào giải bài toán có liên quan đến số học.

*** BÀI HỌC KINH NGHIỆM**

1. Xây dựng mối quan hệ giữa các nghiệm số của một phương trình bậc hai tổng quát (khi có nghiệm số). Với các hệ số a, b, c từ đó hình thành các hệ thức Vi-ét đến phát biểu được nội dung của định lý Vi-ét là một công việc có ý nghĩa vô cùng quan trọng trong việc dạy toán theo hướng đổi mới phương pháp giảng dạy trên cơ sở kiến tạo kiến thức mới sinh động và phong phú.

2. Từ định lý Vi-ét (thuận) nêu ra được các ứng dụng quan trọng như tìm tổng và tích các nghiệm số (không giải phương trình)… Càng làm tăng thêm giá trị sử dụng của một định lý toán học cũng như ý nghĩa của định lý với những bài toán có liên quan.

3. Việc thiết lập mệnh đề đảo của định lý Vi-ét và chứng minh mệnh đề này đúng đã tạo ra một định lý đảo có nhiều ứng dụng vào các bài tập.

- Tìm 2 số biết tổng và tích.
- Lập một phương trình biết hai nghiệm.
- Nhẩm nghiệm phương trình.

4. Nêu ra một hệ thống ứng dụng của định lý Vi-ét vào các bài toán có ý nghĩa thiết thực trong rèn luyện kĩ năng và vận dụng hệ thức vào suy luận ở cấp độ tư duy cao như: Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số …

5. Thường xuyên động viên HS có thói quen giải một phương trình bậc hai, trước tiên là sử dụng Vi-ét. Tạo cho HS một động hình, (tập quán), giải nhanh (hợp

lí) bài toán có phương trình. Đặc biệt là thói quen tính nhẩm trong các trường hợp đã nêu.

6. Thường xuyên "cảnh giác" cho HS trước khi sử dụng hệ thức Vi-ét là tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm số (hoặc điều kiện để có hai số) là một hoạt động có ý nghĩa vận dụng kiến thức trong suy luận và rèn luyện tính cẩn thận, chặt chẽ trong giải toán cho HS.

7. Rèn luyện tính linh hoạt khi vận dụng hệ thức Vi-ét vào các bài toán như: Bất đẳng thức, cực trị, giải phương trình, hệ phương trình… Đã làm phong phú và đa dạng hoá các bài tập có liên quan, càng tăng thêm ý nghĩa phong phú của định lý Vi-ét.

8. Ghi nhớ cho HS kinh nghiệm giải các bài toán về phương trình bậc hai luôn nhớ đến việc vận dụng hệ thức Vi-ét một cách linh hoạt.

9. Khai thác triệt để, sâu sắc, phong phú một định lý toán học nói chung, định lý Vi-ét nói riêng về phương diện ứng dụng vào các bài tập đã tạo ra một hệ thống các bài tập phong phú, hấp dẫn HS giúp cho việc rèn luyện kĩ năng của các em được vững chắc hơn.

KẾT LUẬN

1. Với các ứng dụng phong phú, đa dạng. Định lý Vi-et đã có 1 vị trí quan trọng trong chương trình đại số 9 và giá trị sử dụng của nó vẫn còn có ý nghĩa với các lớp trên. Cũng như việc mở rộng nó với phương trình bậc 3. Định lý này không chỉ có giá trị về phương diện thực hành định lượng mà nó còn có giá trị định tính 1 cách phong phú cho các nghiệm số cả phương trình bậc 2.

2. Khai thác các ứng dụng của định lý Vi-et thuận và đảo vào các bài toán đại số lớp 9, đã làm phong phú và đa dạng các bài tập về phương trình bậc 2, bậc 3. Giúp cho người học rèn luyện các thao tác tư duy đặc biệt là khả năng suy luận và tính linh hoạt trong quá trình học tập môn toán.

3. Cung cấp cho HS 1 cách có hệ thống các nội dung - phương pháp của hệ thức Viet và các ứng dụng phong phú của nó đã giúp HS hiểu sâu mối quan hệ giữa nghiệm số với các hệ số của 1 pt bậc 2, bậc 3. Từ đó hình thành ở HS thói quen học định lý, thấy rõ vai trò của các định lý toán học trong chương trình toán, giúp cho các em rèn luyện được các phẩm chất trí tuệ: Độc lập, sáng tạo, mềm dẻo, linh hoạt và độc đáo trong suy nghĩ.

4. Nêu ra được các giải pháp giải từng loại toán ứng dụng định lý Vi-et. Giúp HS có được phương hướng giải quyết vấn đề có cơ sở lý luận. Xây dựng cho HS niềm tin trong học tập chống tư tưởng ngại khó, sợ toán, giúp các em hăng say học tập, hứng thú tìm tòi cái mới, cái hay trong quá trình học troán.

5. Bước đầu hình thành ở HS những thói quen, kỹ năng làm toán, học toán có phương pháp. Trang bị cho HS phương pháp thực hành toán học 1 cách phong phú, đa dạng. Chuẩn bị cho HS những tiền đề để tiếp thu kiến thức và phương pháp mới ở các lớp sau.

6. Góp phần quan trọng vào thời kỳ đổi mới phương pháp giáo dục. Đó là: việc đi tìm chân lý toán học không chỉ dừng ở chân lý mà cái quan trọng phải thấy được giá trị của chân lý đó, nhằm nâng cao chất lượng dạy và học theo hướng phát huy tích cực của HS…

7. Trên đây là các ứng dụng phong phú của một định lý toán học (định lý Vi-ét) được xây dựng một cách có hệ thống và cơ sở lý luận, bước đầu đã được thực nghiệm và cho kết quả nhất định nhất là việc bồi dưỡng HS khá giỏi phần nào đã giúp người học hình thành được kỹ năng giải toán ở các ứng dụng vào các bài tập của định lý Vi-ét góp phần phát huy được tính tích cực chủ động trong học toán, phẩm chất trí tuệ (tư duy) tạo đà cho HS đổi mới cách học trong giai đoạn hiện nay.

Tuy nhiên do hạn chế cá nhân nên bản sáng kiến kinh nghiệm nói trên cũng không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Vì vậy tôi kính mong sự quan tâm của hội đồng giám định sáng kiến kinh nghiệm của các cấp góp ý chân thành cho bản sáng kiến kinh nghiệm được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Đây là mảng kiến thức sau nhiều năm giảng dạy, tôi đã tích lũy và học hỏi được từ các thầy cô, bạn bè, đồng nghiệp. Nay tôi viết thành sáng kiến kinh nghiệm của tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 4/4/2012

Người viết sáng kiến

Đặng Thị Hương

Ý kiến đánh giá của hội đồng giám định cấp…

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

…………………………………………………………

Ý kiến đánh giá của hội đồng giám định cấp…

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Ý kiến đánh giá của hội đồng giám định cấp…

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………..