SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

MỘT SỐ KỸ THUẬT
SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ - SI

Lĩnh vực: Toán

Cấp học: Trung học cơ sở

Tên tác giả: Nguyễn Cao Cường

Đơn vị công tác: Trường THCS Thái Thịnh, Quận Đống Đa

Chức vụ: Phó Hiệu trưởng

Năm học 2018 - 2019

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

I. Lý do chọn đề tài

Toán học nói chung và toán học phổ thông nói riêng đã giúp người học, người nghiên cứu nó có được kiến thức, tư duy logic và khả năng suy luận. Đối với những học sinh trung học cơ sở, toán học đã hình thành cho các em những kiến thức cơ sở ban đầu, những kiến thức cơ bản nhất của toán học hiện đại. Qua những bài học, những vấn đề toán cùng với những cách thức suy luận đã giúp các em hình thành tư duy toán học.

Toán học sơ cấp có lẽ là mảng toán học đòi hỏi trí thông minh, óc tư duy linh hoạt của người học, trong đó bất đẳng thức (BĐT) là vấn đề hay và khó. Từ các lớp trung học cơ sở, học sinh được giới thiệu một cách cơ bản nhất về bất đẳng thức, phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Và hầu hết những người đã học bất đẳng thức, ai cũng biết về một bất đẳng thức kinh điển, nổi tiếng: bất đẳng thức Cô-si. Nhưng một thực tế chung đối với học sinh phổ thông là việc vận dụng bất đẳng thức Cô - si vào giải toán gặp rất nhiều khó khăn. Chính vì vậy, để giúp học sinh có thể khắc phục phần nào những khó khăn trên, tôi viết đề tài ***"Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô - si"***

II. Nhiệm vụ, mục đích của đề tài

Đề tài ***"Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô - si"*** sẽ giới thiệu đến với học sinh về bất đẳng thức Cô – si và một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô-si. Bên cạnh đó, đề tài cũng chỉ ra những sai lầm thường gặp khi học sinh sử dụng bất đẳng thức Cô – si.

Đề tài được viết theo cách thức lý thuyết đi kèm với ví dụ minh họa. Bên cạnh việc cung cấp, tổng kết những cách sử dụng bất đẳng thức Cô - si, đề tài còn giới thiệu những bài toán minh họa, áp dụng các kỹ thuật được giới thiệu.

III. Phạm vi của đề tài

Với học sinh trung học cơ sở, lớp 8 các em mới được giới thiệu và tiếp cận với bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức Cô -si nói riêng. Vì vậy, đề tài ***"Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô - si"*** hướng tới việc giúp cho học sinh lớp 8; lớp 9 có được những kiến thức về bất đẳng thức Cô-si và một số kỹ thuật sử dụng từ đó giúp cho các em phát triển tư duy về bất đẳng thức, đặt nền móng cho các cấp độ lớn hơn sau này.

IV. Đối tượng nghiên cứu và phương pháp tiến hành

Đề tài tập trung nghiên cứu về bất đẳng thức Cô-si. Trên cơ sở những kiến thức cơ bản về dạng bất đẳng thức, tổng kết một kỹ thuật thường dùng.

Phương pháp chủ yếu của đề tài là phương pháp nghiên cứu và tổng kết kinh nghiệm trong thực tế giảng dạy.

Chương 1. GIỚI THIỆU BẤT ĐẲNG THỨC CÔ – SI

1. Bất đẳng thức Cô – Si (CAUCHY)

1.1.Dạng tổng quát (n số): $\forall x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n \geq 0$ ta có:

- Dạng 1: $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 2: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n \geq n\,\sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n}{n}\right)^n \geq x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n$

Hệ quả 1:

Nếu: $x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n = S = const$ **thì:** $Max\left(\mathrm{P} = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n\right) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = \dfrac{S}{n}$

Hệ quả 2:

Nếu: $x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n = P = const$ **thì:** $Min\left(S = x_1 + x_2 \ldots\ldots\ldots + x_2\right) = n\sqrt[n]{P}$

khi $x_1 = x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$

1.2.Dạng cụ thể (2 số, 3 số):

	n = 2: ∀ x, y ≥ 0 khi đó:	n = 3: ∀ x, y, z ≥ 0 khi đó:
1.2.1	$\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
1.2.2	$x+y \geq 2\sqrt{xy}$	$x+y+z \geq 3\,\sqrt[3]{xyz}$
1.2.3	$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz$
1.2.4	$(x+y)^2 \geq 4xy$	$(x+y+z)^3 \geq 27xyz$
1.2.5	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$
1.2.6	$\dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{4}{(x+y)^2}$	$\dfrac{1}{xyz} \geq \dfrac{4}{(x+y+z)^3}$

Bình luận:

- Để học sinh dễ nhớ, ta nói: Trung bình cộng (TBC) ≥ Trung bình nhân (TBN).
- Dạng 2 và dạng 3 khi đặt cạnh nhau có vẻ tầm thường nhưng lại giúp ta nhận dạng khi sử dụng BĐT Cô Si: (3) đánh giá từ TBN sang TBC khi không có cả căn thức.

2. Những quy tắc chung trong chứng minh bất đẳng thức sử dụng bất đẳng thức Cô – Si:

Quy tắc song hành: hầu hết các BĐT đều có tính đối xứng do đó việc sử dụng các chứng minh một cách song hành, tuần tự sẽ giúp ta hình dung ra được kết quả nhanh chóng và định hướng cách giả nhanh hơn.

Quy tắc dấu bằng: dấu bằng " = " trong BĐT là rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh. Nó định hướng cho ta phương pháp giải, dựa vào điểm rơi của BĐT. Chính vì vậy mà khi dạy cho học sinh ta rèn luyện cho học sinh có thói quen tìm điều kiện xảy ra dấu bằng mặc dù trong các kì thi học sinh có thể không trình bày phần này. Ta thấy được ưu điểm của dấu bằng đặc biệt trong phương pháp điểm rơi và phương pháp tách nghịch đảo trong kỹ thuật sử dụng BĐT Cô Si.

Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng: không chỉ học sinh mà ngay cả một số giáo viên khi mới nghiên cứu và chứng minh BĐT cũng thương rất hay mắc sai lầm này. Áp dụng liên tiếp hoặc song hành các BĐT nhưng không chú ý đến điểm rơi của dấu bằng. Một nguyên tắc khi áp dụng song hành các BĐT là điểm rơi phải được đồng thời xảy ra, nghĩa là các dấu " = " phải được cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.

Quy tắc biên: Cơ sở của quy tắc biên này là các bài toán quy hoạch tuyến tính, các bài toán tối ưu, các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên một miền đóng. Ta biết rằng các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thường xảy ra ở các vị trí biên và các đỉnh nằm trên biên.

Quy tắc đối xứng: các BĐT thường có tính đối xứng vậy thì vai trò của các biến trong BĐT là như nhau do đó dấu " = " thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có gắn hệ điều kiện đối xứng thì ta có thể chỉ ra dấu " = " xảy ra khi các biến bằng nhau và mang một giá trị cụ thể.

Chiều của BĐT : " $\geq$ ", " $\leq$ " cũng sẽ giúp ta định hướng được cách chứng minh: đánh giá từ TBC sang TBN và ngược lại

Trên là 5 quy tắc sẽ giúp ta có định hướng để chứng minh BĐT, học sinh sẽ thực sự hiểu được các quy tắc trên qua các ví dụ và bình luận ở phần sau.

CHƯƠNG 2. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BĐT CÔ - SI

1. Kỹ thuật 1. Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá BĐT theo chiều " $\geq$ ". Đánh giá từ tổng sang tích.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c$

Giải

Sai lầm thường gặp:

Sử dụng: $\forall$ x, y thì $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$. Do đó:

$$\begin{cases} a^2+b^2\geq 2ab \\ b^2+c^2\geq 2bc \\ c^2+a^2\geq 2ca \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c \text{ (Sai)}$$

Ví dụ: $\begin{cases} 2\geq -2 \\ 3\geq -5 \\ 4\geq 3 \end{cases} \Rightarrow 24 = 2.3.4 \geq (-2)(-5).3 = 30$ (Sai)

Lời giải đúng:

Sử dụng BĐT Cô Si: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2\geq 2|ab|\geq 0 \\ b^2+c^2\geq 2|bc|\geq 0 \\ c^2+a^2\geq 2|ca|\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2 \quad \forall a,b,c$$ (Đúng)

Bình luận:

- Chỉ nhân các vế của BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.
- Cần chú ý rằng: $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ vì x, y không biết âm hay dương.
- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay BĐT Cô Si như bài toán nói trên mà phải qua một và phép biến đổi đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Cô Si.
- Trong bài toán trên dấu " $\geq$ " $\Rightarrow$ đánh giá từ TBC sang TBN. 8 = 2.2.2 gợi ý đến việc sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số, 3 cặp số.

Bài 2 : Chứng minh rằng: $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\geq 64ab(a+b)^2 \quad \forall$ a,b ≥ 0

Giải

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 = \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\right]^4 = \left[(a+b)+2\sqrt{ab}\right]^4 \overset{\text{CôSi}}{\geq} \left[2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}\right]^4 = 2^4.2^2.ab.(a+b)^2 =$$
$$= 64ab(a+b)^2$$

Bài 3: Chứng minh rằng: (1 + a + b)(a + b + ab) ≥ 9ab ∀ a, b ≥ 0.

Giải

Ta có: (1 + a + b)(a + b + ab) ≥ $3\sqrt[3]{1.a.b}.\ 3.\sqrt[3]{a.b.ab} = 9ab$

Bình luận:

- 9 = 3.3 gợi ý sử dụng Cô-si cho ba số, 2 cặp. Mỗi biến a, b được xuất hiện ba lần, vậy khi sử dụng Cô Si cho ba số sẽ khử được căn thức cho các biến đó.

Bài 4: Chứng minh rằng: $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ ∀ a, b ≥ 0

Giải: Ta có: $3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + 6b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3b^3 \overset{Côsi}{\geq} 3\sqrt[3]{3^3a^3b^3} = 9ab^2$

Bình luận:

- $9ab^2$ = 9.a.b.b $\Rightarrow$ gợi ý đến việc tách hạng tử $7b^3$ thành hai hạng tử chứa b^3 để khi áp dụng BĐT Cô-si ta có b^2. Khi đã có định hướng như trên thì việc tách các hệ số không có gì khó khăn.

Bài 5: Cho: $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$ $CMR:\ abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Giải

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{1}{1+a} \geq \left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)+\left(1-\frac{1}{1+d}\right) = \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} \overset{Côsi}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Vậy:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+b} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

$$\Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$$

Bài toán tổng quát:

Cho:

$$\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n > 0 \\ \dfrac{1}{1+x_1}+\dfrac{1}{1+x_2}+\dfrac{1}{1+x_3}+\ldots\ldots\ldots+\dfrac{1}{1+x_n} \geq n-1 \end{cases} \qquad CMR:\ x_1x_2x_3\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$$

Bình luận:

- Đối với những bài toán có điều kiện là các biểu thức đối xứng của biền thì việc biến đổi điều kiện mang tính đối xứng sẽ giúp ta xử lí các bài toán chứng minh BĐT dễ dàng hơn

Trong việc đánh giá từ TBC sang TBN có một kỹ thuật nhỏ hay được sử dụng. Đó là kĩ thuật tách nghịch đảo.

2.Kỹ thuật 2: Kỹ thuật tách nghịch đảo.

Bài 1: CMR: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\quad \forall a.b>0$

<u>Giải</u> Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\overset{Côsi}{\ge} 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{b}{a}}=2$

Bài 2: CMR: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\quad \forall a\in R$

<u>Giải</u>

Ta có: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\left(a^2+1\right)+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\overset{Côsi}{\ge} 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\ \sqrt{a^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\Leftrightarrow a^2+1=1\Leftrightarrow a=0$

Bài 3: CMR: $a+\frac{1}{b\left(a-b\right)}\ge 3\ \ \forall a>b>0$

<u>Giải:</u> Ta có nhận xét: b + a – b = a không phụ thuộc vào biến b đo đó hạng tử đầu a sẽ được phân tích như sau:

$$a+\frac{1}{b\left(a-b\right)}=b+\left(a-b\right)+\frac{1}{b\left(a-b\right)}\overset{Côsi}{\ge} 3\sqrt[3]{b.\left(a-b\right).\frac{1}{b\left(a-b\right)}}=3\quad \forall a>b>0$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\ b=\left(a-b\right)=\frac{1}{b\left(a-b\right)}\ \Leftrightarrow$ a = 2 và b = 1.

Bài 4: CMR: $a+\frac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2}\ge 3\quad \forall\ a>b>0$ **(1)**

<u>Giải:</u> Vì hạng tử đầu chỉ có a cần phải thêm bớt để tách thành các hạng tử sau khi sử dụng BĐT sẽ rút gọn cho các thừa số dưới mẫu. Tuy nhiên biểu thức dưới mẫu có dạng $\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2$(thừa số thứ nhất là một đa thức bậc nhất b, thừa số 2 là một thức bậc hai của b) do đó ta phải phân tích về thành tích của các đa thức bậc nhất đối với b, khi đó ta có thể tách hạng tử a thành tổng các hạng tử là các thừa số của mẫu.

Vậy ta có: $\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2$ = (a - b)(b + 1)(b + 1) $\Rightarrow$ ta phân tích a theo 2 cách sau:

2a +2 = 2(a - b) + (b + 1) + (b + 1) hoặc a +1 = $\left(a-b\right)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}$

Từ đó ta có **(1)** tương đương :

$$\text{VT} + 1 = a+1+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}=(a-b)+\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{4}{(a-b)(b+1)(b+1)}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} 4.\sqrt[4]{(a-b).\frac{b+1}{2}.\frac{b+1}{2}.\frac{4}{(a-b)(b+1)(b+1)}}=4 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Bài 5: Bài toán tổng quát:

Cho: $x_1 > x_2 > x_3 > ...., x_n > 0$ và $1 \leq k \in Z$. CMR:

$$a_1+\frac{1}{a_n(a_1-a_2)^k(a_2-a_3)^k..............(a_{n-1}-a_n)^k} \geq \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

<u>Giải</u>

VT =

$$a_n+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+.....+(a_{n-1}-a_n)+\frac{1}{a_n(a_1-a_2)^k(a_2-a_3)^k......(a_{n-1}-a_n)^k}$$

$$=a_n+\underbrace{\frac{(a_1-a_2)}{k}+..+\frac{(a_1-a_2)}{k}}_{k}+..+\underbrace{\frac{(a_{n-1}-a_n)}{k}+...+\frac{(a_{n-1}-a_n)}{k}}_{k}+\frac{1}{a_n(a_1-a_2)^k(a_2-a_3)^k..(a_{n-1}-a_n)^k}$$

$$\geq\left[(n-1)k+2\right].\sqrt[(n-1)k+2]{a_n\underbrace{\frac{(a_1-a_2)}{k}..\frac{(a_1-a_2)}{k}}_{k}..\underbrace{\frac{(a_{n-1}-a_n)}{k}..\frac{(a_{n-1}-a_n)}{k}}_{k}.\frac{1}{a_n(a_1-a_2)^k(a_2-a_3)^k..(a_{n-1}-a_n)^k}}$$

$$=\frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

Tóm lại: *Trong kỹ thuật tách nghịch đảo kỹ thuật cần tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang TBN thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu chỉ còn lại hằng số.*

Tuy nhiên trong kỹ thuật tách nghịch đảo đối với bài toán có điều kiện ràng buộc của ẩn thì việc tách nghịch đảo học sinh thường bị mắc sai lầm. Một kỹ thuật thường được sử dụng trong kỹ thuật tách nghịch đảo, đánh giá từ TBN sang TBC là kỹ thuật chọn điểm rơi.

3. Kỹ thuật 3: Kỹ thuật chọn điểm rơi

Trong kỹ thuật chọn điểm rơi, việc sử dụng dấu “ = ” trong BĐT Cô-si và các quy tắc về tính đồng thời của dấu “ = ”, quy tắc biên và quy tắc đối xứng sẽ được sử dụng để tìm điểm rơi của biến.

Bài 1: Cho a ≥ 2 . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $S=a+\frac{1}{a}$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp của học sinh: $S=a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}}=2$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow a=\frac{1}{a} \Leftrightarrow$ a = 1 $\Rightarrow$ vô lí vì giả thiết là a ≥ 2.

Cách làm đúng:

Ta chọn điểm rơi: ta phải tách hạng tử a hoặc hạng tử $\frac{1}{a}$ để sao cho khi áp dụng BĐT Cô-si dấu " = " xảy ra khi a = 2. Có các hình thức tách sau:

$$\left(a,\frac{1}{a}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(\frac{1}{\alpha}a;\frac{1}{a}\right) & (1)\\ \left(\alpha a;\frac{1}{a}\right) & (2)\\ \left(a;\frac{1}{\alpha a}\right) & (3)\\ \left(a;\frac{\alpha}{a}\right) & (4)\end{array}\right.$$

Chẳng hạn ta chọn sơ đồ điểm rơi (1):
(sơ đồ điểm rơi (2), (3), (4) học sinh tự làm)

$$\begin{cases}\frac{1}{\alpha}a=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow \alpha = 4.$$

Vậy ta có: $S=\frac{a}{4}+\frac{1}{a}+\frac{3a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a}{4}\frac{1}{a}}+\frac{3a}{4}\geq 1+\frac{3.2}{4}=\frac{5}{2}$.   Dấu " = " xảy ra ⇔ a = 2.

Bình luận:

- Ta sử dụng điều kiện dấu " = " và điểm rơi là a = 2 dựa trên quy tắc biên để tìm ra α = 4.
- Ở đây ta thấy tính đồng thời của dấu " = " trong việc áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số $\frac{a}{4},\frac{1}{a}$ và $\frac{3a}{4}$ đạt giá trị lớn nhất khi a = 2, tức là chúng có cùng điểm rơi là a = 2.

Bài 2: Cho a ≥ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+\frac{1}{a^2}$

<u>**Giải**</u>

Sơ đồ chọn điểm rơi: $\boxed{a=2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\ \frac{2}{\alpha}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow \alpha = 8.$

Sai lầm thường gặp:

$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{7a}{8}\geq 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\frac{2}{\sqrt{8a}}+\frac{7a}{8}\geq\frac{2}{\sqrt{8.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{2}{4}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow$ MinS $=\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm:

Mặc dù chọn điểm rơi a = 2 và MinS = $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số: Nếu a ≥ 2 thì $\frac{2}{\sqrt{8a}}\geq\frac{2}{\sqrt{8.2}}=\frac{2}{4}$ là đánh giá sai.

Để thực hiện lời giải đúng ta cần phải kết hợp với kỹ thuật tách nghịch đảo, phải biến đổi S sao cho sau khi sử dụng BĐT Cô-si sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

Lời giải đúng:

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{6a}{8}\overset{\text{Côsi}}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6a}{8}=\frac{3}{4}+\frac{6a}{8}\geq\frac{3}{4}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$$

Với a = 2 thì Min S = $\frac{9}{4}$

Bài 3: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\leq\frac{3}{2}\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6\sqrt[6]{a.b.c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}=6\ \Rightarrow$ Min S = 6

Nguyên nhân sai lầm :

Min S = 6 $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1\ \Rightarrow\ a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giải thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do S là mọt biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=b=c=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha=4$

Hoặc ta có sơ đồ điêm rơi sau:

$$a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha a=\alpha b=\alpha c=\frac{\alpha}{2}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=2\end{cases}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=2\ \Rightarrow\ \alpha=4\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\ \Rightarrow\ \alpha=4$$

Vậy ta có cách giải theo sơ đồ 2 như sau:

$$S=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3(a+b+c)\geq 6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3(a+b+c)$$

$\geq 12-3.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì MinS = $\frac{15}{2}$

Bài 4: Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\leq\frac{3}{2}\end{cases}$. Tìm GTNN của $S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

Giải

Sai lầm thường gặp:

$$S\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}=3\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right).\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right).\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\ge 3\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}\right).\left(2\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}\right).\left(2\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}\right)} = 3\sqrt[6]{8} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{MinS} = 3\sqrt{2}.$$

Nguyên nhân sai lầm:

MinS = $3\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$ $\Rightarrow a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán MinS đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2}=\frac{1}{\alpha b^2}=\frac{1}{\alpha c^2}=\frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha} \Rightarrow \alpha=16$$

Lời giải

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+.....+\frac{1}{16b^2}}_{16}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+.....+\frac{1}{16c^2}}_{16}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+.....+\frac{1}{16a^2}}_{16}}$$

$$\ge \sqrt{17\sqrt[17]{a^2.\underbrace{\frac{1}{16b^2}.....\frac{1}{16b^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{b^2.\underbrace{\frac{1}{16c^2}.....\frac{1}{16c^2}}_{16}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{c^2.\underbrace{\frac{1}{16a^2}.....\frac{1}{16a^2}}_{16}}}$$

$$=\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}}=\sqrt{17}\left(\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right)$$

$$\ge\sqrt{17}\left[3\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right]=3.\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{a}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{(2a2b2c)^5}}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$ Dấu “ = ” xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Min S = $\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi cho bài toán trên đã giải quyết một cách đúng đắn vềmặt toán học nhưng cách làm trên tương đối cồng kềnh. Nếu chúng ta áp dụng việc chọn điểm rơi cho BĐT Bunhiacôpski thì bài toán sẽ nhanh gọn hơn đẹp hơn.
- Trong bài toán trên chúng ta đã dùng một kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC, chiều của dấu của BĐT không chỉ phụ thuộc vào chiều đánh giá mà nó còn phụ thuộc vào biểu thức đánh giá nằm ở mẫu số hay ở tử số

4. Kỹ thuật 4: Kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân (TBN) sang trung bình cộng (TBC)

Nếu như đánh giá từ TBC sang TBN là đánh giá với dấu " $\geq$ ", đánh giá từ tổng sang tích, hiểu nôm na là thay dấu " + " bằng dấu " . " thì ngược lại đánh giá từ TBN sang trung bình cộng là thay dấu " . " bằng dấu " + ". Và cũng cần phải chú ý làm sao khi biến tích thành tổng, thì tổng cũng phải triệt tiêu hết biến, chỉ còn lại hằng số.

Bài 1 : CMR $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leq\sqrt{(a+c)(b+d)}\quad\forall a,b,c,d>0$ **(1)**

<u>Giải</u>(1) $\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{ab}{(a+c)(b+d)}}+\sqrt{\dfrac{cd}{(a+c)(b+d)}}\leq 1$ Theo BĐT Cô-si ta có:

$$VT\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{b+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+d}{b+c}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1(\text{đpcm})$$

Bình luận:

- Nếu giữ nguyên vế trái thì khi biến tích thành tổng ta không thể triệt tiêu ẩn số $\Rightarrow$ ta có phép biến đổi tương đương **(1)** sau đó biến tích thành tổng ta sẽ được các phân thức có cùng mẫu số.
- Dấu " $\leq$ " gợi ý cho ta nếu sử dụng BĐT Cô-si thì ta phải đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 2: CMR $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab}\quad\forall\begin{cases}a>c>0\\b>c>0\end{cases}$ **(1)**

<u>Giải</u> Ta có (**1**) tương đương với : $\sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}}\leq 1$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{(a-c)}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{(b-c)}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a}+\frac{b}{b}\right)=1(\text{đpcm})$$

Bài 3: CMR $1+\sqrt[3]{abc}\leq\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\quad\forall a,b,c\geq 0$ **(1)**

<u>Giải:</u> Ta có biến đổi sau, **(1)** tương đương:

$$\sqrt[3]{1.1.1}+\sqrt[3]{abc}\leq\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\quad\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}\leq 1$$

Theo BĐT Cô-si ta có:

$$VT\leq\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right]+\frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a}+\frac{b+1}{1+b}+\frac{c+1}{1+c}\right]=\frac{1}{3}.3=1$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c > 0.

Ta có bài toán tổng quát 1:

CMR:

$$\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2.......b_n}\leq\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)........(a_n+b_n)}\qquad\forall\ a_i,b_i>0\left(i=\overline{1,n}\right)$$

Bài 4 : Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2 \le (a+b)^4 \quad \forall a,b>0$

Giải

Ta có:

$$16ab(a-b)^2 = 4.(4ab)(a-b)^2 \le 4\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2 = 4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$$

Bài 5: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng $abc(a+b)(b+c)(c+a) \le \frac{8}{729}$

Giải

Sơ đồ điểm rơi:

Ta nhận thấy biểu thức có tính đối xứng do đó dấu " = " của BĐT sẽ xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Nhưng thực tế ta chỉ cần quan tâm là sau khi sử dụng BĐT Cô-si ta cần suy ra được điều kiện xảy ra dấu " = " là: a = b = c. Do đó ta có lời giải sau**:**

$$abc(a+b)(b+c)(c+a) \overset{\text{Côsi}}{\le} \left[\frac{a+b+c}{3}\right]^3 \left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

Trong kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC ta thấy thường nhân thêm các hằng số để sao cho sau biến tích thành tổng các tổng đó triệt tiêu các biến. Đặc biệt là đối với những bài toán có thêm điều kiện ràng buộc của ẩn số thì việc nhân thêm hằng số các em học sinh dễ mắc sai lầm. Sau đây ta lại nghiên cứu thêm 2 phương pháp nữa đó là phương pháp nhân thêm hằng số, và chọn điểm rơi trong việc đánh giá từ TBN sang TBC. Do đã trình bày phương pháp điểm rơi ở trên nên trong mục này ta trình bày gộp cả 2 phần .

5. Kỹ thuật 5: Kỹ thuật nhân thêm hằng số trong đánh giá từ TBN sang TBC

Bài 1: Chứng minh rằng: $a\sqrt{(b-1)} + b\sqrt{(a-1)} \le ab \quad \forall a,b \ge 1$

Giải

Bài này chúng ta hoàn toàn có thể chia cả 2 vế cho ab sau đó áp dụng phương pháp đánh giá từ TBN sang TBC như phần trước đã trình bày, tuy nhiên ở đây ta áp dụng một phương pháp mới: phương pháp nhân thêm hằng số

Ta có : $\begin{cases} a\sqrt{(b-1)} = a\sqrt{(b-1)}.1 \overset{\text{Côsi}}{\le} a\dfrac{(b-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \\ b\sqrt{(a-1)} = b\sqrt{(a-1)}.1 \overset{\text{Côsi}}{\le} b.\dfrac{(a-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad a\sqrt{(b-1)} + b\sqrt{(a-1)} \le \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$

Bình luận:

- Ta thấy việc nhân thêm hằng số 1 vào biểu thức không hoàn toàn tự nhiên, tại sao lại nhân thêm 1 mà không phải là 2. Thực chất của vấn đề là chúng ta đã chọn điểm rơi của BĐT theo quy tắc biên là a = b = 1/2.

Nếu không nhận thức được rõ vấn đề trên học sinh sẽ mắc sai lầm như trong VD sau.

Bài 2: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$

<u>Giải</u>

Sai lầm thường gặp:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(a+b)+1}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{(b+c).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(b+c)+1}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{(c+a).1} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \dfrac{(c+a)+1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{2} = \frac{5}{2}$$

Nguyên nhân sai lầm

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ a + b = b + c = c + a = 1 $\Rightarrow$ a + b + c = 2 trái với giả thiết.

Phân tích và tìm tòi lời giải:

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau do đó điểm rơi của BĐT sẽ là $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ từ đó ta dự đoán Max S = $\sqrt{6}$. $\Rightarrow$ a + b = b + c = c + a = $\dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ hằng số cần nhân thêm là $\dfrac{2}{3}$. Vậy lời giải đúng là:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(a+b).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(b+c).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{(c+a).\dfrac{2}{3}} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2(a+b+c)+3.\dfrac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.2 = \sqrt{6}$$

Bài toán trên nếu cho đầu bài theo yêu cầu sau thì học sinh sẽ có định hướng tốt hơn: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$. Tuy nhiên nếu nắm được kỹ thuật điểm rơi thì việc viết đầu bài theo hướng nào cũng có thể giải quyết được.

Bài 3: Cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ Tìm Max A = (3 – x)(12 – 3y)(2x + 3y)

Giải

$$A = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y) \overset{\text{Côsi}}{\le} \left[\frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3}\right]^3 = 36$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ 6 -2x = 12 - 3y = 2x + 3y = 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Bình luận:

- Việc chọn điểm rơi trong bài toán này đối với học sinh thường bị lúng túng. Tuy nhiên căn cứ vào yêu cầu khi đánh giá từ TBN sang TBC cần phải triệt tiêu hết biến cho nên căn cứ vào các hệ số của tích ta nhân thêm 2 vào thừa số thứ nhất là một điều hợp lý.

Bài 4: Cho x, y > 0. Tìm Min f(x, y) = $\frac{(x+y)^3}{xy^2}$

Giải Ta có:

$$xy^2 = \frac{1}{16}(4x)(2y)(2y) \le \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}(x+y)\right]^3 = \frac{4}{27}(x+y)^3$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{xy^2} \ge \frac{(x+y)^3}{\frac{4}{27}(x+y)^3} = \frac{4}{27} \quad \Rightarrow Min\ f(x,y) = \frac{4}{27}$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow$ 4x = 2y = 2y $\Leftrightarrow$ y = 2x > 0. Đó là tập hợp tất cả các điểm thuộc đường thẳng y = 2x với x dương.

Thực ra việc để hệ số như trên có thể tùy ý được miễn là sao cho khi sau khi áp dụng BĐT Cô-si ta biến tích thành tổng của x + y. (Có thể nhân thêm hệ số như sau: 2x.y.y).

Bình luận:

- Trong bài toán trên yêu cầu là tìm Min nên ta có thể sử dụng kỹ thuật đánh giá từ TBN sang TBC cho phần ở dưới mẫu số vì đánh giá từ TNB sang TBC là đánh giá với dấu “ ≤ ” nên nghịch đảo của nó sẽ là “ ≥ ”.
- Ta cũng có thể đánh giá tử số từ TBC sang TBN để có chiều “ ≥ ”

Bài toán tổng quát :

Cho $x_1, x_2, x_3..........x_4 > 0.\ \ Tìm\ \ Min\ f = \frac{(x_1 + x_2 + x_3..........+x_n)^{1+2+3+...+n}}{x_1.x_2^2.x_3^3..........x_n^n}$

Tóm lại : Để sử dụng BĐT Cô-si từ TBN sang TBC ta cần chú ý: Chỉ số căn thức là bao nhiêu thì số các số hạng trong căn là bấy nhiêu. nếu số các số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm hằng số để số các số hạng bằng chỉ số căn

6.Kỹ thuật 6: Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong kỹ thuật ghép đối xứng chúng ta cần nắm được một số kiểu thao tác sau:

Phép cộng: $\begin{cases} 2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x) \\ x+y+z=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y+z}{2}+\dfrac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân: $x^2y^2z^2=(xy)(yz)(zx)$; $xyz=\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}$ $(x, y, z \geq 0)$

Bài 1: Chứng minh rằng: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq a+b+c \quad \forall a,b,c>0$

<u>Giải</u>

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\right)\geq\sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ca}{b}}=c \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\dfrac{ca}{b}.\dfrac{ab}{c}}=a \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ab}{c}}=c \end{cases} \Rightarrow \dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\geq a+b+c$$

. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c} \qquad \forall abc\neq 0$

<u>Giải</u>

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{b^2}{c^2}}=\left|\dfrac{a}{c}\right|\geq\dfrac{a}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}.\dfrac{c^2}{a^2}}=\left|\dfrac{b}{a}\right|\geq\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\right)\geq\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}.\dfrac{c^2}{a^2}}=\left|\dfrac{c}{b}\right|\geq\dfrac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geq\left|\dfrac{b}{a}\right|+\left|\dfrac{c}{b}\right|+\left|\dfrac{a}{c}\right|\geq\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$$

Bài 3: Cho tam giác ΔABC, a,b,c là số đo ba cạnh của tam giác. CMR:

a) $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\dfrac{1}{8}abc$; **b)** $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\geq 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

<u>Giải</u>

a) Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(p-a)(p-b)} \le \dfrac{(p-a)+(p-b)}{2} = \dfrac{c}{2} \\ \sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{(p-b)+(p-c)}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \sqrt{(p-a)(p-c)} \le \dfrac{(p-a)+(p-c)}{2} = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8}abc$$

b) Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}} = \dfrac{2}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-c}\right) \ge \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-c)}} \ge \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Dấu “ = ” xảy ra cho cả a) và b) khi vào chỉ khi Δ ABC đều: a = b = c

(p là nửa chu vi của tam giác ΔABC: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$)

Bài 4: Cho Δ ABC, a, b, c là số đo ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:
$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$

<u>Giải</u>

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\begin{cases} 0 \le (b+c-a)(c+a-b) \le \dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c \\ 0 \le (c+a-b)(a+b-c) \le \dfrac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a \\ 0 \le (b+c-a)(a+b-c) \le \dfrac{(b+c-a)+(a+b-c)}{2} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \le (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$$

Dấu “ = ” xảy ra ⇔ Δ ABC đều: a = b = c.

7. Kỹ thuật 7: Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo cho 3 số, n số

Nội dung cần nắm đượccác thao tác sau:

1. $\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9 \quad \forall x,y,z>0$

2. $\left(x_1+x_2+........+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+........+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2 \quad \forall x_1,x_2,........,x_n>0$

Bài 1: Chứng minh rằng : $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6 \ \forall a,b,c>0$ **(1)**

Giải

Ta biến đổi **(1)** tương đương: $\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}\geq 9 \Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (đpcm)

Bài 2: Chứng minh rằng: $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Ta biến đổi tương đương BĐT như sau:

$2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$

$\Leftrightarrow \left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(a+c\right)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$ (đpcm)

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2} \ \forall a,b,c>0$(BĐT Nesbit)

Giải

Ta có biến đổi tương đương sau: $\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right)+\left(\frac{a+b+c}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(a+c\right)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$(đpcm)

Bài 4: Chứng minh rằng: $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Ta biến đổi BĐT như sau: $\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right)+\left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)\geq\frac{3\left(a+b+c\right)}{2}$

$\Leftrightarrow \quad c\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{3\left(a+b+c\right)}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left[\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right]\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(a+b)+(b+c)+(a+c)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq 9$$

8. Kỹ thuật 8: Kỹ thuật đổi biến số

Có những bài toàn về mặt biểu thức toán học tương đối cồng kềnh hoặc khó giải, khó nhận biết được phương hướng giải,ta có thể chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi về trạng thái dễ biến đổi hơn. Phương pháp trên gọi là phương pháp đổi biến.

Bài 1: Chứng minh rằng: $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2}\ \forall a,b,c>0$ (BĐT Nesbit)

Giải

Đặt: $\begin{cases} b+c=x>0 \\ c+a=y>0 \\ a+b=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{y+z-x}{2};\ b=\frac{z+x-y}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\geq 6$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, Thật vậy áp dụng BĐT Cô-si ta có:

VT $\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}=2+2+2=6$

Dấu “ = ” xảy ra ⇔ x = y = z ⇔ a = b = c

Bài 2: Cho ΔABC**.** Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c$

Giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{z+x}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y+z)^2}{4x}+\frac{(z+x)^2}{4y}+\frac{(x+y)^2}{4z}\geq x+y+z \qquad \textbf{(2)}$$

Ta có: VT **(2)** $\geq \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq}\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{zx}{y}.\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}=x+y+z$$

Bài 3: Cho Δ ABC. CMR : (b + c – a).(c + a – b).(a + b – c) ≤ abc **(1)**

Giải

Đặt: $\begin{cases} b+c-a=x>0 \\ c+a-b=y>0 \\ a+b-c=z>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{y+z}{2};\ b=\dfrac{z+x}{2};\ c=\dfrac{x+y}{2}.$

Khi đó ta có BĐT **(1)** tương đương với bất đẳng thức sau: $xyz \le \dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}.\dfrac{z+x}{2}$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{y+z}{2}.\dfrac{z+x}{2} \ge \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx} = xyz$ (đpcm)

Bài 4: Cho ΔABC. CMR:

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2} \ge \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \textbf{(1)}$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} p-a=x>0 \\ p-b=y>0 \\ p-c=z>0 \end{cases}$ thì **(1)** ⇔ $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2} \ge \dfrac{x+y+z}{xyz}$ **(2)**

Ta có:

VT **(2)** $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}\right) \ge \sqrt{\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{y^2}.\dfrac{1}{z^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{z^2}}$

$= \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx} = \dfrac{x+y+z}{xyz}$

Dấu “ = ” xảy ra ⇔ x = y = z ⇔ a = b = c ⇔ Δ ABC đều.

KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

Đề tài *"Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô - si"* bước đầu đã đạt được một số mục đích của người viết:

- Học sinh rất hứng thú, không còn sợ bất đẳng thức nhưng lúc mới tiếp cận.
- Học sinh bước đầu vận dụng bất đẳng thức Cô - si vào giải các dạng toán đơn giản như: chứng minh bất đẳng thức đơn giản; tìm cực trị đại số.
- Học sinh có được các kỹ thuật cơ bản sử dụng bất đẳng thức Cô-si và ít mắc sai lầm khi vận dụng.
- Học sinh giỏi vận dụng tốt bất đẳng thức Cô-si trong các kỳ thi học sinh giỏi, thi vào trường chuyên lớp chọn, thi vào lớp 10 THPT.

Kết quả khảo sát trước và sau khi thực hiện đề tài (thực hiện với 52 học sinh lớp 9G và 50 học sinh đội tuyển thi học sinh giỏi cấp Quận và thi Olympic cấp Quận)

	Biết bất đẳng thức Cô-Si	*Từng áp dụng BĐT Cô-si vào giải toán*	*Đã biết về các kỹ thuật sử dụng BĐT Cô-si mà học sinh biết*	*Hứng thú khi vận dụng bất đẳng thức Cô-si*
Trước khi thực hiện đề tài	52%	30%	38%	35%
Sau khi thực hiện đề tài	100%	90%	100%	86%

Chúng ta đều biết vai trò quan trọng của bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức Cô-si trong toán học hiện nay. Vai trò này với học sinh giỏi toán, học sinh chuyên toán lại càng quan trọng. Nó giúp học sinh có những kiến thức nền về bất đẳng thức, từ đó các em có thể phát triển thêm tư duy về chứng minh, sử dụng bất đẳng thức trong việc giải các dạng toán từ đơn giản đến phức tạp.

Tuy nhiên với góc nhìn của cá nhân, đề tài khó tránh khỏi các sai sót. Đặc biệt là các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô-si chưa đầy đủ, hệ thống bài tập chưa phong phú. Người viết rất mong muốn nhận được các ý kiến đóng góp để đề tài được hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp vui lòng liên hệ:

Nguyễn Cao Cường

Trường THCS Thái Thịnh - Quận Đống Đa – Thành Phố Hà Nội

Địa chỉ: 131 A - Phố Thái Thịnh – Quận Đống Đa – Thành Phố Hà Nội
Email: nguyencaocuong.hanoi@gmail.com

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hà Văn Chương - 838 bài toán bât đẳng thức – NXB ĐHQG TPHCM.
2. Nguyễn Đức Tấn – Chuyên đề bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số (THCS) – NXB Giáo dục
3. Trần Phương - Các phương pháp chứng minh BĐT - NXB TPHCM
4. Trần Phương – Những sai lầm thường gặp khi giải toán.
5. Nguyễn Vũ Thanh – Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THCS : Đại Số - NXB Giáo dục.
6. Phạm Quốc Phong – Nâng cao đại số - NXB Giáo dục.
7. Nguyễn Văn Mậu -Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp không mẫu mực – NXB Giáo dục.